MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

PRAEFATIO

Quemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis sollicitatorum exposui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare constitui; quae differentia in motus explicatione tanti est momenti, vt ex ea merito totius operis diuisio sit facta. In motu enim libero via a corpore descripta cum ex motu iam insito, tum ex potentiis tam absolutis quam resistentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia praeter potentias et resistentiam nibil adesse ponitur, quod corporis motum determinet. Atque idcirco motus liberi haec est primaria proprietas, vt via a corpore descripta omnino non prematur; canalis scilicet secundum viam, quam corpus describere debet, exacte incuruatus, a corpore transeunte nullam omnino pressionem sustinebit, sed corpus per eum libere transibit. In motu autem non libero praeter potentias et resistentiam, quibus corpus sollicitatur, viam praescriptam esse ponimus, ita vt corpus sit coactum in hac via moueri. Haec *ergo via praescripta ad instar canalis commode considerari potest, in quo corpus mouetur, neque ex eo erumpere potest. Cum igitur in istiusmodi motibus data sit via, in qua corpus moueri debet, inquirendum est,*

quan-

quantam corpus a quibuscunque potentiis et resistentia sollicitatum in singulis locis habiturum sit celeritatem, quippe qua cognita totus motus perfecte cognoscitur. Praeterea *autem cum corpus, nisi in hoc canali esset inclusum, aliam lineam describeret, retinebit saltem in canali conatum in ea linea, in qua si liberum esset, moueretur, progrediendi, hocque conatu latera canalis premet, et nisi satis habeant firmitatis reipsa disrumpet.* Hanc *ob rem praeter celeritatem, quam corpus in singulis canalis locis habebit, determinari debet quoque pressio, quam in latera canalis exeret, eiusque pressionis directio, quo firmitas laterum canalis ad corpus retinendum requisita cognoscatur.* Huiusmodi *autem motus non liberi etiam sine canali aliis modis produci possunt, id quod obseruare licet in pendulis, atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea moueri cogitur.* Pendulis *enim, prout* Hugenius *docuit, effici potest, vt corpus in quacunque curua praescripta moueri cogatur, quemadmodum in pendulis tum simpliciter suspensis, quibus corpus in linea circulari moueri cogitur apparet, tum iis, quae intra cycloides suspendi solent, quibus corpus in cycloide moueri cogitur; similique modo effici potest vt corpus in data quaque curua incedere cogatur.* Haec *igitur est prima species motus non liberi, qui fit super data linea.* Praeter *eam autem tali a species motus non liberi attendi meretur, in qua non ipsa quidem via, sed tantum superficies praescribitur, in qua corpus moueri cogitur; minus igitur haec motuum non liberorum species est restricta quam prior, cum in hac corpori adhuc libertas sit relicta sibi viam in data superficie sitam eligendi.*

gendi. Hanc ob rem haec motus non liberi ſpecies ita tractari debet, vt primo linea in data ſuperficie determinetur, quam corpus a potentiis et reſiſtentia ſollicitatum deſcribet, deinde vero vt celeritas corporis in ſingulis huius lineae punctis definiatur, tertio denique vt etiam preſſio, quam corpus in ſuperficiem exercet, inueſtigetur. Huiusmodi autem motus non liberi pariter ac priores pendulis quoque commode repraeſentari poſſunt; corpus enim pendulum oblique impulſum, vt eius directio non ſit in plano verticali, lineas curuas varii generis deſcribet, quae autem omnes ſunt in ſuperficie ſphaerica, cuius centrum in ipſo ſuſpenſionis puncto extat. Inquiſitio ideo huius motus huc redit, vt in ſuperficie ſphaerica primo linea quam corpus proiectum deſcribet, determinetur, deinde vero celeritas in ſingulis locis, et tertio preſſio, quam in ſuperficiem exeret. Simili modo etiam perſpicitur, effici poſſe, vt corpus pendulum non ad ſuperficiem ſphaericam, ſed ad aliam quamque reſtringatur, dum ſcilicet circa punctum ſuſpenſionis ſuperficies euoluta diſponatur. Haec igitur eſt altera motuum non liberorum ſpecies, quae in motu ſuper data ſuperficie determinando occupatur; atque in his duabus motuum non liberorum ſpeciebus indagandis totus hic Tomus ſecundus abſoluitur. Quo ergo ad hanc tractationem, quae ſcitu neceſſaria ſunt, praeparentur, in capite primo fundamenta et principia expoſui, ex quibus, quae ad cognitionem vtriusque ſpeciei motuum non liberorum pertinent, deriuari queant. Demonſtraui nimirum corpus a nullis potentiis ſollicitatum tam ſuper data linea, quam

super superficie motu aequabili moueri debere; in superficie autem fore viam a corpore descriptam ipsam lineam breuissimamque quae in ea superficie duci potest. Deinde inuestigaui leges generales, quas quaeque potentiae atque etiam resistentia tum in accelerando vel retardando motum tum in pressione generanda obseruant. Ad haec etiam doctrina de vi centrifuga exponitur, quam corpora etiam a nullis potentiis sollicitata exercent, quaeque ex motu curuilineo, quo corpus incedere cogitur, ortum habet. In capitibus deinde secundo et tertio motus corporum super data linea tam in vacuo quam in medio resistente fuse contemplor et examino. Primo nimirum motum determino, quo corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum super data linea siue recta siue curua mouetur, siue descendendo siue ascendendo; atque si curua ita fuerit comparata vt tam ad descensus quam ascensus producendos sit idonea oscillationes quoque definio, easque inter se ratione temporum comparo; atque in hoc negotio indolem et proprietates oscillationum tam in circulo quam cycloide factarum definio. Deinceps problemata tracto inuersa, quibus potissimum pro datis potentiis sollicitantibus in curuas inquiro, super quibus motus datam habeat proprietatem. Huc scilicet pertinent problemata de inueniendis curuis aequabilis descensus vel recessus a dato puncto, et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam sunt tractata, vel ad quae ipsum institutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problemata de lineis brachystochronis et tautochronis, quorum vtrumque ad vleriorem quam

ad-

adhuc a quoquam est factum, perfectionis gradum euexi. Circa curuas enim brachystochronas errorem, qui a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi, et loco principii Hugeniani *in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui, quo demonstraui in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypothesi quacunque, eam perpetuo curuam esse brachystrochronam, super qua corpus ita moueatur, vt tota pressio duplo sit maior quam vis centrifuga. Simili modo nouam atque genuinam curuas tautochronas inueniendi methodum trado, (quae enim ante sunt inuentae tautochronae nulla omnino methodo sed potius diuinatione sunt erutae) cuius ope non solum cycloidem iam dudum sub tautochronae nomine celebrem inueni, sed praeter eam innumerabiles alias curuas quaesito satisfacientes elicui, inter quas adeo curuam algebraicam obseruaui; praeterea tam ex aliis agnatis quaestionibus in vacuo, quam ex integra huius negotii tractatione pro medio resistente, praestantiam et vtilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum vti haec methodus instar speciminis tam Analyseos quam Mechanicae promotae est censenda, ita quoque passim in difficiliorum quorundam problematum solutionibus non contemnenda Analyseos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promota esse videatur.*

In quarto denique capite motum super data superficie persequor, quae doctrina, vti a nemine adhuc est tacta ita quoque tractatu est difficillima, propter naturam et proprietates soli-

solidorum nondum satis perspectas neque ad calculum reuocatas. Antequam igitur de huius modi motu quicquam patui potuerat, methodum exponere necesse erat, qua proprietates superficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiici possent. Hoc itaque praestiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tum in Comment. Tomo III. ad lineam breuissimam super quauis superficie determinandam, tum in huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inuestigandos sum vsus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in corpora super superficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore descriptam quam reliqua motus symptomata inueniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus versamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis; omissa resistentia omnia ad vacuum et grauitatem ordinariam reduxi, atque praecipue motum pendulorum oblique oscillantium sum perscrutatus, cuius motus anomalias et absidum progressiones diligenter determinaui. Haec igitur sunt, quae in isto tomo secundo sum complexus, quibus expeditis operam dabo, vt, quam primum licuerit motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum, in ordinem reducam atque pari methodo exponam.

CAPVT

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE.

DEFINITIO I.

I.

Corpus non libere moueri dicitur, quando externa obſtacula impediunt, quo minus iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus inſiti, tum ratione potentiarum ſollicitantium moueri deberet.

Scholion I.

2. In motu puncti libero, quem Parte prima expoſuimus ſpatium, in quo corpus mouebatur, ab omnibus obſtaculis vacuum aſſumſimus, nunc vero ſpatium ita comparatum ponemus, vt corpori non liceat in quaque directione progredi, propter firmos parietes tranſitum non permittentes.

Corollarium 1.

3. Quando itaque corpus in motu ſuo obſtaculum inuenit, ideoque eam directionem, ſecundum quam tendit, conſeruare non poteſt; tum vel quieſcere, vel in alia directione motum continuare debebit.

Corollarium 2.

4. In quanam autem directione corpus progrediatur poſt occurſum obſtaculi, ex circumſtantiis tum motus tum poſitionis obſtaculi iudicari debet.

Scholion 2.

5. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percuſſione pertinere, qua de re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obſtacula aſſumimus, quae illam notitiam non requirunt. Sunt haec obſtacula continua, quae motum puncti reſtringunt neque vllam reflexionem admittunt; cuiusmodi eſt tubus vel canalis ſiue rectus ſiue incurvatus, in quo corpuſculum motum continuare debet. Hoc caſu via penitus praeſcribitur, in qua corpus progredietur, neque propter tubi firmitatem inde egredi poterit. Quare cum hic loco corporis punctum conſideremus, hac poſitione punctum in data linea moueri debebit, neque ex ea excedere poterit.

Scholion 3.

6. Duas autem hoc libro pertractabimus motus impediti ſeu reſtricti ſpecies, quarum primae mo-

modo mentionem fecimus, quaeque complectitur motus punctorum super data linea siue recta siue curua. Altera species minus restringit motus libertatem, superficiem enim tantum praescribit, in qua corpus perpetuo versari debeat. Atque has duas motus impediti species isto libro sumus expositiuri.

Corollarium 3.

7. Quae igitur in prima specie sunt inquirenda, sunt corporis seu potius puncti celeritas in quouis lineae praescriptae loco, pressio in hanc lineam, et tempus, quo punctum datam viae portionem percurrit.

Corollarium 4.

8. Circa motus alterius speciei autem praeter haec inueniri debet ipsa linea, quam corpus super superficie data describit. Quarum rerum fontes hoc primo capite aperiemus.

Scholion 4.

9. Hoc vero capite primum inuestigabimus motus vtriusque speciei, si corpus a nullis potentiis sollicitetur; vbi ostendimus, qua celeritate id progredi debeat, et quanta vi vbique tam lineam datam, quam superficiem datam premat. Sed si superficies tantum data fuerit, praeterea viam determinabimus in qua corpus mouebitur a nullis potentiis sollicitatum. Deinde vero principia exponemus, ex quibus iudicari licebit, quae mutationes a potentiis sollicitantibus tam absolutis quam rela-

tiuis oriantur, quo in feqnentibus capitibus fingula diftincte deducere queamus.

Scholion 5.

10. In his autem motibus tam fuper lineis quam fuperficiebus datis, animum ab omni frictione abftrahimus, neque vllam motus retardationem ponemus. Quamobrem lineae et fuperficies, fuper quibus puncta moueri ponuntur, laeviffimae concipi debent et omni afperitate deftitutae, ne motus retardationi propter eam fit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino ex animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae demum in fequentibus explicari poffunt. Hanc ob rem puuctum quafi rependo moueri concipiendum eft, vt eius pars quaeque, fi modo in puncto partes concipi poffunt, eundem habeat motum.

Scholion 6.

11. Quae igitur in praecedente libro traditae funt, et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari poffunt, fi modo eorum motus fibi fit perpetuo parallelus, et omnes partes corporis aequali motu fint praeditae. Hoc vero ex fequentibus libris clarius apparebit, quibus cafibus finitorum corporum motus a motu punctorum non difcrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum confideramus, quia ut partibus deftituuntur, ita etiam in partibus diuerfi motus ineffe nequeunt.

PRO-

PROPOSITIO I.
Theorema.

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data mouetur, et a nullis potentiis sollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conseruabit: si modo illius lineae duo quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituant.*

Demonstratio.

Tab. I. Fig. 1.

Quia corpus, dum in linea A M mouetur, a nulla potentia sollicitatur, neque frictioni vllus conceditur locus, motus corporis aliter variari nequit, nisi quatenus linea A M impedit, quo minus corpus libere moueri possit; ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, inuestigandum est. Sit celeritas, quam corpus in M habet $= c$, hac igitur celeritate corpus, si libere moueretur, in tangente $M\nu$ progrederetur, quod vero, quia corpus curvam A M deferere non potest, fieri nequit: sed corpus cogitur per Mm progredi. Hanc ob causam concipiatur motus corporis secundum $M\nu$, resolutus in motum per Mm et motum per Mn, existente $Mm\nu n$ parallelogrammo rectangulo. Perspicuum hic est motum per Mn, cuius directio est normalis in curuae elementum Mm, penitus absorberi, neque vllum effectum in celeritate immutanda habere posse. Corpus igitur altero motu progredietur in Mm, celeritate, quae est ad pristinam celeritatem vt Mm ad $M\nu$: quare celeritas, qua corpus elementum Mm describit, erit $= \frac{Mm.c}{M\nu}$. Quoniam vero, $M\nu m$ est triangulum ad m rectangulum ideoque $Mm < M\nu$, celeri-

tas haec minor erit quam prior c, atque celeritatis decrementum erit $= \frac{(M\nu - Mm)c}{M\nu}$. Ad huius valorem inueniendum sit M O radius osculi curuae in M $= r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. O $=$ ang. $mM\nu$, MO: $Mm = Mm$: $m\nu$, ex quo prodit $m\nu = \frac{ds^2}{r}$, atque $M\nu = \sqrt{(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2})} = \frac{ds}{r}\sqrt{(r^2 + ds^2)} = ds + \frac{ds^2}{2r^2}$. Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curuae elementum ds percurrit $= \frac{cds^2}{2r^2}$, cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curuae A M portionem percurrit. At expressio $\frac{cds^2}{2rr}$ aequiualet differentiali secundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis postquam corpus quantumuis arcum curuae datae percurrit, erit infinite paruum, atque corpus motu uniformi feretur per totam curuam A M, si modo radius osculi r nusquam fuerit infinite paruus. Q. E. D.

Corollarium 1.

13. In omni igitur curua, in qua radius osculi nusquam est infinite paruus, corpus mouebitur vniformiter, siquidem a nullis potentiis sollicitatur; neque frictionem patitur.

Corollarium 2.

14. Si radius osculi est infinite paruus, tum $\frac{cds^2}{2r^2}$ vel est quantitas finita vel differentiale primi gradus.

Illo

Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite paruum.

Corollarium 3.

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curuis sint rara et a se inuicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu vniformi percurret.

Scholion 1.

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi vbi curua habet cuspides. His enim in locis corpus directe reverti cogitur, et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur, atque ita motum vniformem conseruabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

Scholion 2.

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curuis puncta, in quibus radius curvedinis est infinite paruus; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita, et angulus deinceps positus est infinite paruus fieri non potest, vt ex demonstratione apparet, vt corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili mouebitur.

Co-

Corollarium 4.

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curua semper motu aequabili feretur: at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

Scholion 3.

Tabula I. Fig. 2. 19. Vt haec clarius percipiantur, sint duo curuae elementa AB, BC, et anguli ABC quem constituunt, deinceps positus CBD infinite paruus, cuius sinus sit dz posito sinu toto $= 1$. Quia corpus postquam elementum AB descripsit vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit c; eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendiculo DC, corpus altero motu per BC mouebitur celeritate, quae est ad priorem vt BC ad BD, i. e. vt $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c-\frac{c\,dz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{c\,dz^2}{2}$, quod aequiualet differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curua angulus CBD fuerit infinite paruus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curua angulus vel est infinite paruus, vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus vniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus vniformitas conseruatur.

PRO-

PROPOSITIO 2.
Theorema.

20. *Dum corpus motu vniformi in curua AM mouetur, in singulis punctis M premet curvam normaliter vi, quae est ad corporis vim grauitatis, vt altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi.*

Tabula I. Fig. 1.

Demonstratio.

Si corpus in curua AM libere moueri deberet motu aequabili; tum vbique vim adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahentem tantam, quae se haberet ad corporis grauitatem, vt altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium osculi MO, vt ex demonstratis Libri praeced. apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta progrederetur. Hoc autem casu canalis AM in quo corpus inclusum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter premet, secundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali AM libere moueretur, neque illum premeret; hac vero vi absente, vt hic ponimus, necesse est vt corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

Corollarium I.

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et radius osculi $MO = r$, atque grauitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum; erit vis, qua

corpus canalem in M secundum Mn premet $= \frac{2v}{r}$.

Corollarium 2.

22 Si corpus maiore vel minore celeritate moueretur in curva AM, tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

Corollarium 3.

23. Directio huius pressionis est normalis in curuam, et directe contraria est positioni radii osculi MO. Quare radius osculi in alteram curuae partem productus dabit directionem huius pressionis.

Corollarium 4.

24. Si corpus in linea recta mouetur; haec pressio erit nulla, ob radium osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta vniformiter sponte progreditur, et hanc ob rem canalem rectum non premit.

Corollarium 5.

25. Si curua AM fuerit circulus, pressio vbique erit eadem. Eo vero maior erit quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem, pressio erit reciproce vt radius circuli.

Scholion 1.

26. Quo corpus in curua AM libere moueri pos-

possit vniformiter, necesse est vt secundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi licet, corpus tanta vi in plagam oppositam niti, alioquin enim illa vi non esset opus ad corpus in curua conseruandum. Dum igitur corpus in canali AM moueri cogitur, neque eius nisus a vi normali tollitur, hunc nisum re ipsa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, vt hanc pressionem sustinere queat.

Corollarium 6.

27. Apparet igitur corpus motum sine vllo celeritatis dispendio effectum edere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

Corollarium 7.

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem uti ex pressione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu pressio oriri potest.

Scholion 2.

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus Libro primo, incertum esse, vtrum motus potentiis debeatur, an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo vtrumque potentias nempe et motum existere; vtrum igitur alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex obseruationibus decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corporibus conatus insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere. Praeterea vero is phaenomenorum cau-

sas geminas dedisse censendus est, qui omnia a motu orta demonstrauerit. Motum enim semel existentem perpetuo conseruari debere clare ostendimus supra; hic vero, quemadmodum ex motu potentiae oriantur exposuimus. Quemadmodum vero potentiae sine motu vel existere vel conseruari queant, concipi non potest. Quamobrem concludimus omnes potentias, quae in mundo conspiciuntur, a motu prouenire; atque diligenti scrutatori incumbit inuestigare ex quonam, quorumque corporum motu quaelibet potentia in mundo obseruata ortum suum habeat.

Scholion 3.

30. Cum difficile intellectu sit, quomodo talis effectus, pressio scilicet continua, a corpore moto, sine vllo celeritatis dispendio, oriatur; operae pretium erit in huius rei caussam inquirere. Vidimus in praecedente propositione motum corporis in curua linea non absolute aequabilem esse, sed celeritatem reuera decrementum pati, dum corpus per singula elementa curuae mouetur. Haec vero decrementa differentialibus secundi gradus aequiualent, vt etiam infinities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere queant. Huic igitur infinite paruo celeritatis decremento pressionem adscribi debere iudico; in hacque sententia eo magis confirmor, quod, quo maius sit hoc celeritatis decrementum, eo maior quoque existat pressio. Cum pressio in M sit $\frac{2v}{r}$, hacque vi totum elementum Mm, dum percurritur pre-

prematur, licebit huius pressionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2vds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inuentum est $\frac{cds^2}{2r^2}$ (12). Quod autem ibi erat c hic nobis est $\sqrt{v}$, ergo cum esset $-dc = \frac{cds^2}{2r^2}$ erit $-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2}$ seu $-dv = \frac{vds^2}{r^2}$. Habebitur ergo $-4vdv = \frac{4v^2ds^2}{r^2}$ = quadrato pressionis quam sustinet elementum Mm.

Corollarium 8.

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitae aequiualet decremento ipsius $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2; tum pressio aequalis est vi grauitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognoscitur.

Corollarium 9.

32. His ergo concessis, istud infinities infinite paruum celeritatis decrementum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim ipsius v^2 decrementum homogeneum est ipsi ds^2, pressio est finita, sin vero id decrementum infinities maius existeret quam ds^2, pressio quoque foret infinite magna.

DEFINITIO 2.

33. Pressio haec, quam corpus in linea curua motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga; eo quod eius directio a centro circuli osculatoris O tendit.

Co-

Corollarium 1.

34. Vis centrifuga ergo est ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati debita ad dimidium radium osculi.

Corollarium 2.

35. Quando ergo corpus in linea curua moueri cogitur, hanc curuam vi centrifuga premit, etiamsi a nulla potentia sollicitetur.

Scholion.

36. Quando vero corpus a potentiis quoque sollicitatur, pressio quoque in canalem ab his potentiis orietur, tumque canalis duplici ratione premetur, partim nempe a potentiis partim a vi centrifuga. Nunc igitur quid potentiae in corpus non libere motum valeant, inuestigandum est.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3.

37. *Si corpus, quod in canali AM mouetur, sollicitetur in M a potentia MN, cuius directio normalis est in curuam AM, celeritas neque augebitur neque minuetur: sed tota potentia in premendo canali consumetur.*

Demonstratio.

Ex priore libro manifestum est potentiam, cuius directio in directionem motus sit normalis, celeritatem neque augere neque minuere. Quanquam hoc enim ibi de motu libero est demonstratum, hic tamen eodem rigore locum habet, cum po-

potentia normalis corpus neque in consequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non potest. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem, et consequenter tanta vi canalem premet in directione MN. Q. E. D.

Corollarium 1.

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim centrifugam hoc casu minuit.

Corollarium 2.

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curuae partem incidit, eius effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam incidit: at si normalis vis in concavam partem dirigitur minuetur effectus.

Corollarium 3.

40. Si vis normalis fuerit $= N$, et vis centrifuga vt ante $= \frac{2v}{r}$; premetur curua vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r} - N$ si fuerint contrariae.

Corollarium 4.

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curua nullam pressionem sustinebit; seu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo casu eandem curuam corpus libere describeret; id

id quod perspicuum quoque est ex vi normali, quae tum est $\frac{2v}{r}$: hac enim efficitur, vt corpus aequabiliter in quacunque curua libere moueatur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3.

42. *Si corpus quod in canali A M mouetur, in M sollicitetur a potentia, cuius directio sit secundum tangentem M T: huius effectus in hoc consistet, vt celeritatem corporis vel augeat, vel diminuat, eodem modo, quo in motu libero.*

Demonstratio.

Quia huius potentiae directio est ipsa canalis tangens MT, canalis effectum huius potentiae impedire non potest; neque etiam in canalem haec potentia vllum effectum exerere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet, celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conspirans vel contraria fuerit, prorsus ac si corpus libere moueretur. Atque posita altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$, et vi $MT = T$, erit $dv = T\,ds$, accelerante potentia T: at retardante ea, erit $dv = -T\,ds$. Q. E. D.

Corollarium 1.

43. In motu corporum igitur super lineis datis vis normalis pressionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

Corollarium 2.

44. Cum vis resistentiae effectum vis tangentialis

tialis retardantis praestet, eodem quoque modo aget in motum corporum super datis lineis, ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit resistentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = T\,ds - R\,ds$.

PROPOSITIO 5.

Problema.

45. *Si corpus super linea data A M moueatur in medio quocunque resistente, et insuper sollicitetur a potentia absoluta, cuius directio sit MP; determinare effectum tam potentiae absolutae, quam resistentiae, nec non pressionem, quam curua A M sustinet.* Tabula I. Fig. 4.

Solutio.

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis resistentiae $= R$, et vis absoluta M P $= P$: cuius directio sit talis, vt sumto elemento $Mm = ds$ sit perpendiculum mn ex m in M P demissum $= dx$ et $Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Resoluatur potentia P in has duas secundum MN normalem in curuam et M T tangentem trahentes, erit ob triangula MPT et Mmn similia, vis normalis MN seu $PT = \frac{P\,dx}{ds}$, et vis tangentialis $MT = \frac{P\,dy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis resistentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab excessu $\frac{P\,dy}{ds} - R$, hanc ob rem erit $dv = P\,dy - R\,ds$ (42). Normalis vis $\frac{P\,dx}{ds}$ vero efficit, vt curua in M tantundem prematur secundum directionem MN, ad convexam curuae partem sitam. Quare cum vis centrifuga in eandem plagam vrgeat, quae est $= \frac{2v}{r}$

$\frac{2v}{r}$, designante r radium osculi in M; erit vis totalis, qua curua in M secundum MN premitur $= \frac{Pdx}{ds} + \frac{2v}{r}$. Vnde tum motus corporis super curua, tum curuae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

Scholion I.

47. Hic quidem vnicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas normalem nempe et tangentialem sunt resoluendae, ex quibus colligendis vna vis normalis vnaque tangentialis oritur: quarum effectus per propositiones 3. et 4. determinari poterunt.

Scholion 2.

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit vt paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci pote-

poterit, propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, vti primum a Hugenio factum est; quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.

PROPOSITIO 6.

Problema.

49. *Ope penduli efficere vt corpus in data linea moueatur.* Tab. I. Fig. 5.

Constructio.

Sit A M B curua proposita in qua corpus moueri debeat; huius curuae construatur euoluta A O C, laminaque secundum eius figuram incuruetur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus mouendum. Quando igitur corpus moueri incipit, perspicuum est id in curua AMB moueri debere, quia filum dum a lamina separatur hanc curuam euolutione describit. Q.E. Fac.

Corollarium I.

50. Hac igitur ratione corpus in data curua progreditur, atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inueniuntur.

tas haec minor erit quam prior c, atque celeritatis decrementum erit $= \frac{(M\nu - Mm)c}{M\nu}$. Ad huius valorem inueniendum fit M O radius osculi curuae in $M = r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. O = ang. $mM\nu$, MO: $Mm = Mm : m\nu$, ex quo prodit $m\nu = \frac{ds^2}{r}$, atque $M\nu = \sqrt{(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2})} = \frac{ds}{r}\sqrt{(r^2 + ds^2)} = ds + \frac{ds^2}{2r^2}$. Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curuae elementum ds percurrit $= \frac{c\,ds^2}{2r^2}$, cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curuae A M portionem percurrit. At expressio $\frac{c\,ds^2}{2rr}$ aequiualet differentiali secundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis postquam corpus quantumuis arcum curuae datae percurrit, erit infinite paruum, atque corpus motu uniformi feretur per totam curuam A M, si modo radius osculi r nusquam fuerit infinite paruus. Q. E. D.

Corollarium 1.

13. In omni igitur curua, in qua radius osculi nusquam est infinite paruus, corpus mouebitur vniformiter, siquidem a nullis potentiis sollicitatur; neque frictionem patitur.

Corollarium 2.

14. Si radius osculi est infinite paruus, tum $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ vel est quantitas finita vel differentiale primi gradus.

Illo

Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite paruum.

Corollarium 3.

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curuis sint rara et a se inuicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu vniformi percurret.

Scholion I.

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi vbi curua habet cuspides. His enim in locis corpus directe reuerti cogitur, et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur, atque ita motum vniformem conseruabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

Scholion 2.

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curuis puncta, in quibus radius curuedinis est infinite paruus; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita, et angulus deinceps positus est infinite paruus fieri non potest, vt ex demonstratione apparet, vt corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili mouebitur.

Co-

Corollarium 4.

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curua semper motu aequabili feretur: at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

Scholion 3.

Tabula I. Fig. 2. 19. Vt haec clarius percipiantur, sint duo curuae elementa AB, BC, et anguli ABC quem constituunt, deinceps positus CBD infinite paruus, cuius sinus sit dz posito sinu toto $= 1$. Quia corpus postquam elementum AB descripsit vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit c; eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendiculo DC, corpus altero motu per BC mouebitur celeritate, quae est ad priorem vt BC ad BD, i. e. vt $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c - \frac{cdz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{cdz^2}{2}$, quod aequiualet differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curua angulus CBD fuerit infinite paruus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curua angulus vel est infinite paruus, vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus vniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus vniformitas conseruatur.

PRO-

PROPOSITIO 2.

Theorema.

Tabula I. Fig. 1.

20. *Dum corpus motu vniformi in curua AM mouetur, in fingulis punctis M premet curuam normaliter vi, quae est ad corporis vim grauitatis, vt altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi.*

Demonftratio.

Si corpus in curua AM libere moueri deberet motu aequabili; tum vbique vim adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahentem tantam, quae se haberet ad corporis grauitatem, vt altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium osculi MO, vt ex demonstratis Libri praeced. apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta progrederetur. Hoc autem casu canalis AM in quo corpus inclusum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter premet, secundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali AM libere moueretur, neque illum premeret; hac vero vi absente, vt hic ponimus, necesse est vt corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

Corollarium I.

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et radius osculi $MO = r$, atque grauitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum; erit vis, qua

 cor-

corpus canalem in M secundum Mn premet $= \frac{2v}{r}$.

Corollarium 2.

22 Si corpus maiore vel minore celeritate moueretur in curva AM, tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

Corollarium 3.

23. Directio huius pressionis est normalis in curuam, et directe contraria est positioni radii osculi MO. Quare radius osculi in alteram curuae partem productus dabit directionem huius pressionis.

Corollarium 4.

24. Si corpus in linea recta mouetur; haec pressio erit nulla, ob radium osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta vniformiter sponte progreditur, et hanc ob rem canalem rectum non premit.

Corollarium 5.

25. Si curua AM fuerit circulus, pressio vbique erit eadem. Eo vero maior erit quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem, pressio erit reciproce vt radius circuli.

Scholion 1.

26. Quo corpus in curua AM libere moueri pos-

possit vniformiter, necesse est vt secundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi licet, corpus tanta vi in plagam oppositam niti, alioquin enim illa vi non esset opus ad corpus in curua conseruandum. Dum igitur corpus in canali AM moueri cogitur, neque eius nisus a vi normali tollitur, hunc nisum re ipsa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, vt hanc pressionem sustinere queat.

Corollarium 6.

27. Apparet igitur corpus motum sine vllo celeritatis dispendio effectum edere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

Corollarium 7.

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem uti ex pressione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu pressio oriri potest.

Scholion 2.

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus Libro primo, incertum esse, vtrum motus potentiis debeatur, an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo vtrumque potentias nempe et motum existere; vtrum igitur alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex obseruationibus decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corporibus conatus insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere. Praeterea vero is phaenomenorum cau-

prematur, licebit huius pressionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2v\,ds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inuentum est $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (12). Quod autem ibi erat c hic nobis est $\sqrt{v}$, ergo cum esset $-dc = \frac{c\,ds^2}{2r^2}$ erit $-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2}$ seu $-dv = \frac{v\,ds^2}{r^2}$. Habebitur ergo $-4v\,dv = \frac{4v^2 ds^2}{r^2}$ = quadrato pressionis quam sustinet elementum Mm.

Corollarium 8.

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitae aequiualet decremento ipsius $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2; tum pressio aequalis est vi grauitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognoscitur.

Corollarium 9.

32. His ergo concessis, istud infinities infinite paruum celeritatis decrementum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim ipsius v^2 decrementum homogeneum est ipsi ds^2, pressio est finita, sin vero id decrementum infinities maius existeret quam ds^2, pressio quoque foret infinite magna.

DEFINITIO 2.

33. Pressio haec, quam corpus in linea curua motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga; eo quod eius directio a centro circuli osculatoris O tendit.

Co-

potentia normalis corpus neque in consequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non potest. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem, et consequenter tanta vi canalem premet in directione MN. Q. E. D.

Corollarium 1.

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim centrifugam hoc casu minuit.

Corollarium 2.

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curuae partem incidit, eius effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam incidit: at si normalis vis in concavam partem dirigitur minuetur effectus.

Corollarium 3.

40. Si vis normalis fuerit $= N$, et vis centrifuga vt ante $= \frac{2v}{r}$, premetur curua vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r} - N$ si fuerint contrariae.

Corollarium 4.

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curua nullam pressionem sustinebit; seu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo casu eandem curuam corpus libere describeret; id

id quod perſpicuum quoque eſt ex vi normali, quae tum eſt $\frac{2v}{r}$: hac enim efficitur, vt corpus aequabiliter in quacunque curua libere moueatur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3.

42. *Si corpus quod in canali A M mouetur, in M ſollicitetur a potentia, cuius directio ſit ſecundum tangentem M T: huius effectus in hoc conſiſtet, vt celeritatem corporis vel augeat, vel diminuat, eodem modo, quo in motu libero.*

Demonſtratio.

Quia huius potentiae directio eſt ipſa canalis tangens MT, canalis effectum huius potentiae impedire non poteſt; neque etiam in canalem haec potentia vllum effectum exerere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet, celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conſpirans vel contraria fuerit, prorſus ac ſi corpus libere moueretur. Atque poſita altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$, et vi $MT = T$, erit $dv = Tds$, accelerante potentia T: at retardante ea, erit $dv = -Tds$. Q. E. D.

Corollarium 1.

43. In motu corporum igitur ſuper lineis datis vis normalis preſſionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

Corollarium 2.

44. Cum vis reſiſtentiae effectum vis tangentialis

tialis retardantis praestet, eodem quoque modo aget in motum corporum super datis lineis, ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit resistentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = T ds - R ds$.

PROPOSITIO 5.

Problema.

45. *Si corpus super linea data A M moueatur in medio quocunque resistente, et insuper sollicitetur a potentia absoluta, cuius directio sit MP; determinare effectum tam potentiae absolutae, quam resistentiae, nec non pressionem, quam curua A M sustinet.*

Tabula I. Fig. 4.

Solutio.

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis resistentiae $= R$, et vis absoluta M P $= P$: cuius directio sit talis, vt sumto elemento $Mm = ds$ sit perpendiculum mn ex m in M P demissum $= dx$ et $Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Resoluatur potentia P in has duas secundum MN normalem in curuam et M T tangentem trahentes, erit ob triangula MPT et Mmn similia, vis normalis MN seu PT $= \frac{Pdx}{ds}$, et vis tangentialis MT $= \frac{Pdy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis resistentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab excessu $\frac{Pdy}{ds} - R$, hanc ob rem erit $dv = Pdy - R ds$ (42). Normalis vis $\frac{Pdx}{ds}$ vero efficit, vt curua in M tantundem prematur secundum directionem MN, ad convexam curuae partem sitam. Quare cum vis centrifuga in eandem plagam vrgeat, quae est $= \frac{2v}{r}$

$\frac{2v}{r}$, designante r radium osculi in M; erit vis totalis, qua curua in M secundum M N premitur $= \frac{Pdx}{ds} + \frac{2v}{r}$. Vnde tum motus corporis super curua, tum curuae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

Scholion I.

47. Hic quidem vnicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas normalem nempe et tangentialem sunt resoluendae, ex quibus colligendis vna vis normalis vnaque tangentialis oritur: quarum effectus per propositiones 3. et 4. determinari poterunt.

Scholion 2.

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit vt paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci pote-

poterit, propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, vti primum a Hugenio factum est; quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.

PROPOSITIO 6.

Problema.

49. *Ope penduli efficere vt corpus in data linea moueatur.*

Tab. I. Fig. 5.

Constructio.

Sit A M B curua proposita in qua corpus moueri debeat; huius curuae construatur euoluta AOC, laminaque secundum eius figuram incuruetur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus mouendum. Quando igitur corpus moueri incipit, perspicuum est id in curua AMB moueri debere, quia filum dum a lamina separatur hanc curuam euolutione describit. Q.E. Fac.

Corollarium I.

50. Hac igitur ratione corpus in data curua progreditur, atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inueniuntur.

Corollarium 2.

51. Ex doctrina de euolutionibus intelligitur fili partem MO a lamina separatam, in curuam AMB esse normalem ipsumque eius radium osculi.

Corollarium 3.

Tabula I. Fig. 6.

52. Quo corpus in peripheria circuli AMB moueatur, lamina incuruata non est opus, sed filum altero termino C tantummodo in centro C peripheriae est figendum.

Corollarium 4.

Fig. 5.

53. Quia filum MO est radius osculi, vis centrifuga tota ad tendendum hoc filum impendetur. Quare hoc filum tum satis roboris habere, tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpetuo longitudinem conseruet, curuam desideratam non describet.

Corollarium 5.

54. Accedente potentia absoluta, habebitur praeter vim centrifugam vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspirans. At si contraria fuerit minuet tensionem fili, imo etiam si maior fuerit, comprimet, quo casu euolutio nullius erit vsus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit, neque ideo impedire, quo minus corpus a curua AMB versus euolutam recedat.

Scholion 1.

55. Praeter hanc difficultatem, ista curuarum per euolutiones generatio hoc quoque laborat

borat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam enim generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec euolutio ad curuas accommodari non poteſt, quae alicubi radium oſculi habent infinite magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae curuae hoc modo deſcribi poſſunt. Quamobrem ita praxis locum tantum habet in curuis vbique finitam curuaturam habentibus, ad quod addi debet, vt preſſio curuae totalis nusquam in curuae concauam partem dirigatur.

Scholion 2.

56. Hugenius, qui primus euolutionis doctrinam excoluit, ſtatim eam ad hunc ipſum vſum adhibuit; vti ex eius egregio opere de horologio oſcillatorio apparet. Cum enim inueniſſet oſcillationes ſuper cycloide omnes eſſe iſochronas, motum ſuper cycloide in horologia inferre volebat, quod per pendulum intra cycloides oſcillans effecit. Cum enim cycloidis euoluta ſit cyclois, hac ratione obtinuit, vt corpus filo annexum in cycloide moueretur.

Scholion 3.

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari conuenit, praeter corpus motum filum quoque moueri debere, id quod ad inſtitutum huius libri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praeterea motus corporis pendulo annexi non eſt ſibi parallelus, ſed circularis circa centrum ſcilicet circuli curuam oſculantis, qui motus pariter hoc loco non attin-

 gitur.

gitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel superficie data examini subiiciemus, mentemque tam a motu fili, quam a motu circulari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, vbi et motus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tantum reducemus, ita vt haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in praxi vsum sint habitura. Quamobrem, vt iam monuimus, punctum motu sibi semper parallelo super curua seu superficie sine vlla frictione ferri est concipiendum.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

Tabula II. Fig. 2.

58. *Si corpus a nullis potentiis sollicitatum moueatur in vacuo seu medio non resistente super superficie quacunque ABC: motu feretur vniformi animum ab omni frictione abstrahendo.*

Demonstratio.

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, multo magis super superficie data moueri poterit, eo quod eius libertas minus est restricta. Sit igitur D*Mm* linea, in qua corpus progreditur; haec erit vel recta vel curua. Si ista linea fuerit recta dubium non est, quin corpus motu aequabili sit progressurum. Sin autem fuerit curua, quae aequatione exprimi potest, duo quaeque eius elementa contigua vel proxime in directum erunt sita, vel an-

angulum infinite acutum constituent, quod in cuspidibus accidit. Illo casu supra demonstratum est corpus nullum motus decrementum pati (12). In cuspidibus vero corpus quidem omnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem si motus tantum fiat in curua vel parte curuae cuspidibus carente motus corporis erit aequabilis. Q. E. D.

Corollarium 1.

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem mutare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequiualet, ideoque, etiamsi integretur, decrementum tamen infinite paruum producit.

Corollarium 2.

60. Si scilicet corporis celeritas fuerit c et radius osculi $MO = r$, erit decrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit $= \frac{c\,ds^2}{2rs}$ (12).

Scholion.

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonstratione primae propositionis, neque aliud est discrimen, nisi quod corpus illo casu in data linea moueri cogatur, hoc vero casu super superficie data viae quaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae circa primam propositionem sunt factae hic quoque valent. Videbimus ergo, quam-

quamnam viam, corpus in ſuperficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

Tabula II. Fig. 1.

62. Via DMm, quam corpus ſuper ſuperficie quacunque ABC motum deſcribit, eſt linea breuiſſima, quae inter terminos D et M duci poteſt; ſi ſcilicet corpus in vacuo moueatur, et a nullis potentiis ſollicitetur.

Demonſtratio.

Deſcripſerit corpus iam curuam DM; manifeſtum eſt corpus ex M in tangente Mn eſſe progreſſurum, niſi in ſuperficiet perſeuerare cogeretur. Quia igitur motus per Mn fieri non poteſt, reſoluatur is in duos laterales, quorum alter in ipſa ſuperficie ſit diſpoſitus, alterius vero directio in ſuperficiem ſit perpedicularis, atque ideo penitus non in effectum deduci poſſit. Hanc ob rem ex n in ſuperficiem demittatur perpendiculum nm, erit recta Mm elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum ergo nMm, in quo poſita ſunt et elementum mM, et id quod a corpore immediate ante eſt deſcriptum, erit normale in ſuperficiem. At linea breuiſſima in quauis ſuperficie ducta hanc habet proprietatem, vt planum, in quo poſita ſunt duo quaeque elementa contigua, ſit in ſuperficiem normale. Quamobrem linea DMm, quae a corpore deſcribitur, eſt linea breuiſſima in ſuperficie ABC. Q.E.D.

Co-

Corollarium 1.

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea breuissima in superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habebitur via, qua corpus motu vniformi mouebitur.

Corollarium 2.

64. Quia filum tensum in superficie lineam breuissimam designat, ostendet filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie mouetur.

Corollarium 3.

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus lineam rectam describet, quia haec in plano est linea breuissima. Atque in superficie sphaerica corpus in circulo maximo mouebitur.

Corollarium 4.

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curuae D M *m* elementa contigua, normale est in superficiem, radius osculi curuae vero in eodem plano sit positus et in curuam normalis; erit radius osculi curuae descriptae MO normalis in superficiem.

Scholion.

67. Quemadmodum in quauis superficie linea breuissima sit inuenienda a me primum ostensum est in Tomo III. Comment. Acad. Imp. Petrop. Cum autem ibi ex alio principio lineam breuissi-

mam determinauerim, atque haec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam hanc breuissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare constitui.

PROPOSITIO 9.
Problema

Tabula II. Fig. 2.

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum, quod super ea mouetur, describit.*

Solutio.

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio planum A P Q fixum in eoque recta AP pro axe. Tum ex quouis superficiei puncto M demittatur in hoc planum perpendiculum MQ, et ex Q in axem AP perpendicularis QP. Positis nunc $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, natura superficiei dabitur per aequationem inter has tres variabiles x, y et z et constantes. Sit huius aequationis differentialis $dz = Pdx + Qdy$, ex qua linea breuissima in hac superficie seu linea, quam corpus describit, determinari debet. Haec linea vero ex hoc determinatur, quod eius radius osculi in ipsam superficiei normalem incidat. Quamobrem primo normalem superficiei, et deinde cuiusque in ea ductae curuae radium osculi determinabimus; quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quaesitae possit concludi.

Ad

Ad normalem in superficiem inueniendam secetur primo superficies plano MQB, existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP, prodeatque ex hac sectione curua BM; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$, quae ex locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur, posita y constante seu $dy = o$. Ducatur ad hanc curuam BM normalis ME rectae BQ productae in E occurrens, erit subnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc EN perpendiculari ad BE, quaevis recta MN a M ad NE ducta normalis erit in curuam BM. Simili modo superficies secetur plano PQM prodeatque sectio CM, cuius natura exprimetur aequatione inter z et y manente x constante, quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curuam erit subnormalis $QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$, signo negatiuo vtor; quia subnormalem QF versus P cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP; quaeuis recta ex M ad FN ducta normalis erit in curuam CM. Recta MN ergo, quae in punctum intersectionis N rectarum FN et EN cadit, perpendicularis in vtramque curuam BM et CM, et hanc ob rem perpendicularis erit in superficiem. Locus ergo normalis inuenitur sumendo $AH = x + Pz$, et $HN = -Qz - y$.

Ad determinandam vero radii osculi cuiusuis curuae in superficie data ductae positionem sint duo curuae elementa Mm et $m\mu$, quibus respondeant in plano APQ elementa Qq, $q\varrho$, atque in axe AP assumto elementa Pp, $p\pi$, quae sint aequa- Tabula II. Fig. 3.

 lia.

lia. Erit ergo $Pp = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $p\varrho = y + 2dy + ddy$; $Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; $q\varrho = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; $qm = z + dz$; $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, et $m\mu = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dy\,ddy + dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Producantur Qq et Mm vtrinque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in r, haec vero ipsi rn normali in planum APQ in n occurrat; eritque ob $Pp = p\pi$, $qr = Qq$ et $mn = Mm$, atque $\pi r = y + 2dy$, ac $rn = z + 2dz$ Iam ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi Qq productae in S, erit $QS = \frac{(qm - QM)QM}{Qq} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS, omnes rectae ex m ad SR ductae normales erunt ad elementum Mm. In his igitur normalibus erit radius osculi curuae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano sunt elementa mn et $n\mu$, ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ. At nm vel mM occurrit plano APQ in T, vbi cum elemento Qq producto concurrit. Est igitur $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}$. Ipsi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ erit sita, haec vero MV in planum APQ incidet in V, dabiturque QV ex analogia hac $(rn - \rho\mu)$:

$r\varrho$

$r\varrho = QM : QV$; erit itaque $QV = \frac{z\,ddy}{ddz}$. Hanc ob rem recta TV producta erit interfectio plani $nm\mu$ cum plano APQ; quare recta ME, quae in concurfum rectarum SR & TV eft ducta, erit fimul normalis in Mm et pofita in plano $nm\mu$; eritque propterea MR pofitio radii ofculi curuae in M. Ex his punctum R hoc modo determinabitur; erit, ducta RX perpendiculari in AP productam, $AX = \frac{z\,dx(dy\,ddy + dz\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dy\,dz\,ddy} + x$ atque $XR = \frac{z\,dx\,ddy + z\,dz(dz\,ddy - dy\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dy\,dz\,ddy} - y$. Quo igitur normalis in fuperficiem MN in radii ofculi curuae directionem incidat, debet effe $AH = AX$ et $XR = HN$; vnde erit $P(dx^2 + dy^2)ddz - P\,dy\,dz\,ddy = dx\,dy\,ddy + dx\,dz\,ddz$ et $-Q(dx^2 + dy^2)ddz + Q\,dy\,dz\,ddy = dx^2\,ddy + dz^2\,ddy - dz\,dy\,ddz$. Quae quidem aequationes inter fe congruunt, fiet enim ex iis coniunctim $P\,dx + Q\,dy = dz$, quae eft ipfa aequatio naturam fuperficiei exponens. Harum igitur aequationum alterutra cum hac $dz = P\,dx + Q\,dy$ coniuncta dabit curuam a corpore in propofita fuperficie percurfam. Q.E.I.

Tabula II. Fig. 2. & 3

Corollarium I.

96. Erit igitur pro linea in fuperficie propofita defcripta $ddz : ddy = P\,dy\,dz + dx\,dy : P\,dx^2 + P\,dy^2 - dx\,dz$. At quia eft $dz = P\,dx + Q\,dy$, erit $ddz : ddy = P\,dz + dx : P\,dy - Q\,dx$, feu $P\,dy\,ddz - Q\,dx\,ddz = P\,dz\,ddy + dx\,ddy$.

 Co-

Corollarium 2.

70. Si aſſumatur altera aequatio et vtrinque ſubtrahatur $Q dz^2 ddz - dy^2 ddy$ habebitur $-Q(dx^2 + dy^2 + dz^2) ddz + Q dy dz ddy + dy^2 ddy = (dx^2 + dy^2 + dz^2) ddy - Q dz^2 ddz - dz dy ddz$. Vnde habetur $\frac{ddy + Q ddz}{dy + Q dz} = \frac{dy ddy + dz ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Quae eſt illa ipſa aequatio, quam pro linea breuiſſima in quacunque ſuperficie dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

Scholion I.

71. Vt in hoc caſu quo corpus a nulla potentia ſollicitatur, directio radii oſculi cum normali in ſuperficiem congruere debet, ita in aliis caſibus, quando corpus ſollicitatur a potentiis, hae lineae datum angulum conſtituere debent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inueniendum ſit MN normalis in ſuperficiem, et MR directio radii oſculi; erit, vt iam vel poſuimus vel inuenimus, $PQ = y$, $QM = z$; $PH = bN = Pz$; $Qb = -Qz$; $PX = Rx = \frac{z dx (dy ddy + dz ddz)}{(dx^2 + dy^2) ddz - dy dz ddy}$, et $Qx = \frac{z dx^2 ddy + z dz (dz ddy - dy ddz)}{(dx^2 + dy^2) ddz - dy dz ddy}$. Ducta NR ex N in MR demittatur perpendiculum NO, erit $MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx . Nb + Qx . Qb}{MR}$ et $NO = \frac{\sqrt{(MR^2 MN^2 - (MQ^2 + Rx . Nb + Qx . Qb)^2)}}{MR} = \frac{1}{\sqrt{(MQ^2}}$

$\frac{\sqrt{(MQ^2(Qx - Qb)^2 + MQ^2(Rx - Nb^2) + (Rx.\,Qb - Qx.\,Nb)^2)}}{MR}$.

Anguli vero RMN tangens eſt $= \frac{NO}{MO}$ poſito ſinu toto $= 1$. Subſtitutis autem ſupra aſſumtis ſymbolis et in ſubſidium vocata aequatione $dz = Pdx + Qdy$ prodibit tangens anguli NMR $= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddx - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Hoc ergo angulo euaneſcente fit $ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$ ut ſupra (69).

Scholion 2.

72. Ipſa vero radii oſculi longitudo MO inuenitur ex angul $nm\mu$ ope huius analogiae vt ſinus anguli $nm\mu$ ad ſinum totum ita Mm ad MO. Eſt vero $n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)}$ et $mn - m\mu = \frac{-dy\,ddy - dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$, ergo perpendiculum ex n in $m\mu$ productum $= \frac{\sqrt{(dx^2 ddy^2 + dz^2 ddy^2 + dx^2 ddz^2 + dy^2 ddz^2 - 2\,dy\,dz\,ddy\,ddz)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Quare hoc perpendiculum eſt ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ad MO, vnde prodit radius oſculi MO $= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dy\,ddz - dz\,ddy)^2)}}$. Hoc autem radio oſculi opus erit in ſequente propoſitione, in qua preſſionem, quam corpus in ſuperficiem exercet, inueſtigabimus.

Tabula II. Fig. 3.

Scho-

Scholion 3.

73. Ex hac generali radii osculi expressione orietur ea pro radio osculi lineae breuissimae, si conjungatur cum hac aequatione $ddz = \frac{ddy(Pdz+dx)}{Pdy-Qdx}$ et locali $dz = Pdx + Qdy$. Prodibit autem radius osculi $= \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(Pdy-Qdx)}{dx\,ddy\,\sqrt{(P^2+Q^2+1)}} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{ddx-Qddy} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{dPdx+dQdy}$. Atque haec expressio dat radium osculi curuae in superficie proposita descriptae a corpore a nullis potentiis sollicitato.

PROPOSITIO 10.
Theorema.

Tabula II. Fig. 1.

74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum in ipsam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius convexitatem, et se habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati corporis debita, ad dimidium radii osculi curvae a corpore descriptae.*

Demonstratio.

Sit DMm curua in superficie ABC a corpore descripta; altitudo celeritati corporis debita $= dv$; et radius osculi curuae $MO = r$. Quia corpus ex M, si libere moueri posset, progrederetur in elemento Mn; superficies vero efficit, vt per elementum Mm incedat, existente nm perpendiculo in superficiem; superficies a corpore

pore fecundum directionem nm premetur, tanta vi, quanta opus eft ad corpus ex directione Mn in directionem Mm pertrahendum. Hoc vero praeftatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in fuperficiem feu fecundum directionem radii ofculi MO agente. Quamobrem preffio corporis in fuperficiem erit normalis, quippe agens fecundum mn et aequalis $\frac{2v}{r}$, exiftente vi grauitatis corporis $= 1$. Q.E.D.

Corollarium 1.

75. Haec eft igitur vis centrifuga, quam corpus in fuperficiem fimili modo exercet, quo in lineam datam, in qua moueri cogitur.

Scholion. 1.

76. Preffio in fuperficiem neceffario debet effe normalis. Nam nifi effet normalis refolvi poffet in duas, quarum altera effet normalis; altera in ipfa fuperficie pofita. Harum vero normalis tantum ad premendam fuperficiem impenditur, dum altera ipfum corporis motum immutaret.

Corollarium 2.

77. Longitudinem radii ofculi r lineae, quam corpus a nullis potentiis follicitatum fuper propofita fuperficie defcribit, inuenimus (73). Ea igitur affumta erit vis centrifuga $= \frac{(2v(ddz - Qddx)}{dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}$ $= \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}$.

Scho-

Scholion 2.

78. De hac vi centrifuga in ſuperficiem exercita eadem locum habent, quae ſupra de vi centrifuga in datam curuam ſunt annotata, vid. Prop. 2. cum annexis Coroll. et Schol. Linea enim breuiſſima, quam corpus ſuper ſuperficie percurrit, inſtar canalis conſiderari poteſt, in quo corpus moueatur; atque tum de motu in hoc canali omnia valent, quae ſupra de motu ſuper data linea, nullis agentibus potentiis, ſunt allata.

PROPOSITIO II.

Problema.

79. *Determinare effectum cuiusuis potentiae, quem exerit in corpus ſuper data ſuperficie motum tam in vacuo quam in medio reſiſtente.*

Solutio.

Quaecunque ſit directio potentiae ſollicitantis corpus, ea reſolvi poteſt in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio normalis in ſuperficiem: ſecundae, quam per N deſignabimus directio normalis tam in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cuius igitur directio erit in plano tangente ſuperficiem, Tertiae potentiae T appellatae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis: priores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones ſunt inter ſe normales, nullius effectus a reliquis perturbari

turbari poterit. Quare quem effectum quaeque producat, inuestigabimus.

Prima potentia M, cuius directio in superficiem est normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu; sed tota impendetur in pressionem superficiei. Augebit igitur vel diminuet pressionem a vi centrifuga ortam, prout eius directio in plagam conuexae partis superficiei incidit, vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem erit totalis pressio in superficiem versus partes exteriores $= \frac{-2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} - M$ (77). Pressio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc casu potentia M.

Secunda potentia N, quia eius directio in ipsa superficie est posita, et normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutabit celeritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a linea breuissima deducet, facietque vt non amplius in plano ad superficiem normali moueatur: huius igitur plani, in quo corpus mouebitur, inclinationem ad planum lineae breuissimae normale in superficiem inuestigari oportet. Huius vero inclinationis angulo aequalis est angulus, quem radius osculi lineae descriptae cum normali in curuam constituit; quemque ante generaliter determinavimus (71). Postquam corpus elementum Mm celeritate altitudini v debita descripsit progrederetur,

tur,

tur, nisi a vi N sollicitaretur per elementum in ν, ita vt Mm et $m\nu$ essent duo elementa lineae breuissimae, et posita in plano ad superficiem normali, erit directio vis N normalis in planum chartae, sit ea $\nu\mu$; corpus igitur hac vi a plano chartae sursum reducetur, si quidem ponamus hanc vim N sursum esse directam hac elementorum positione vt in figura repraesentatur. Efficiat ergo haec vis, vt corpus per elementum $m\mu$ moueatur, anguloque $\nu m\mu$ a directione $m\nu$ deflectat. Huic angulo respondet radius osculi $= \frac{m\nu^2}{\mu\nu}$. Quare cum vis N hunc angulum generet, celeritasque curuae debita sit altitudini v, erit ex effectu virium normalium $N = \frac{2v \cdot \mu\nu}{m\nu^2}$ ideoque $\mu\nu = \frac{N \cdot m\nu^2}{2v}$. Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu mouebitur, ad planum $Mm\nu$, quod in superficiem est normale, inveniatur, demittatur ex ν in elementum Mm productum perpendiculum νn; erit μn quoque in mn perpendiculare, ideoque angulus $\mu n\nu$ erit angulus inclinationis plani μmM ad planum νmM; atque cum $\mu\nu$ sit normalis ad νn; huius anguli tangens erit $= \frac{\mu\nu}{n\nu} = \frac{N \cdot m\nu^2}{2v \cdot n\nu}$. At $n\nu$ determinatur ex inclinatione elementorum Mm et $m\nu$ seu radio osculi lineae breuissimae, cuius Mm et $m\nu$ sunt elementa. Sit hic radius osculi r; erit $\frac{m\nu^2}{n\nu} = r$, ideoque tangens anguli $\mu n\nu = \frac{Nr}{2v} = \frac{N \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v(dPdx + dQdy)}$, substituto loco r valore

valore inuento (73.). Huic vero angulo aequalis eſt angulus, quem radius oſculi elementorum Mm, $m\mu$ a corpore actu deſcriptorum conſtituit cum radio oſculi elementorum Mm, $m\nu$ ſeu cum normali in ſuperficiem. Huius autem anguli tangentem ſupra invenimus (71). Quare facta aequatione habebimus $\frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddz-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$, qua aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum ſit $ddz - Qddy = dPdx + dQdy$ habebitur iſta aequatio $ddy(dx+Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v}$.

Tertia potentia T, quia in directione corporis eſt poſita, celeritatem tantum vel auget vel diminuit. Ponamus eam eſſe accelerantem, exprimetur eius effectus hac aequatione $dv = T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Atque ſi motus in medio fiat reſiſtente reſiſtentiaque ſit $= R$, minuenda tantum eſt vis tangentialis T reſiſtentia R. Quamobrem habebitur $dv = (T-R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v altera dv determinat, vna conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro ſuperficie $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta determi-

minat curuam, quam corpus ſuper propoſita ſuperficie deſcribit.

Scholion I.

81. De potentia N bene eſt attendendum in quam plagam tendat, h. e. an ad dextram an ad ſiniſtram regionem corporis moti vergat? Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmatiua vel negatiua eſt accipienda. De hoc vero non erimus hic ſolliciti, ſed vlteriorem huius rei disquiſitionem in caput vltimum huius libri differemus.

Scholion 2.

82. Ad ſequens igitur caput ſecundum progredimur, in quo motum corporis ſuper data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus ſuper data linea in medio reſiſtente inueſtigabimus. Quarto denique capite motum ſuper data ſuperficie tam in vacuo quam in medio reſiſtente ſcrutabimur.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN VACUO.

PROPOSITIO 12.

Problema.

83.

Sollicitetur corpus, quod super curua AM *mouetur, vbique a potentia* MF *cuius directio sit parallela axi* AP; *determinare celeritatem corporis in singulis punctis, atque tempus, quo curuae quaeuis portio describitur, nec non pressionem, quam curua in singulis punctis patitur.*

Tabula III. Fig. 3.

Solutio.

Descripserit corpus iam arcum AM, sitque eius celeritas in A debita altitudini b, atque celeritas in M debita altitudini v. Positis nunc $AP = x$; $PM = y$; et arcu $AM = s$; resoluatur potentia MF, que sit p in laterales normalem scilicet MN et tangentialem MT; erit $ds : dx = MF : MT$ et $ds : dy = MF : MN$. Hinc igitur prodibit vis tangentialis $MT = \frac{pdx}{ds}$ et vis normalis $= \frac{pdy}{ds}$. Perspicuum hic est vim tangentialem celeritatem corporis minuere, erit ergo $dv = -pdx$ (42.) atque $v = C - \int pdx$. Sumto autem integrali $\int pdx$ ita, vt evanescat posito $x = 0$, erit $v = b - \int pdx$; ex qua aequatione

ne corporis celeritas in ſingulis punctis cognoſcitur. Ex eadem aequatione innoteſcit quoque tempus, quo arcus AM abſoluitur, poſito enim tempore t erit $t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int p\,dx)}}$. Vis normalis $MN = \frac{p\,dy}{ds}$ tota impenditur in curuae preſſionem ſecundum MN (39). augebit ergo preſſionem a vi centrifuga ortam, quia MN in oppoſitam radii oſculi MO plagam cadit. Quare cum poſito radio oſculi $NO = r$ vis centrifuga ſit $= \frac{2v}{r}$ (20). Erit totalis preſſio in curuam iuxta MN $= \frac{p\,dy}{ds} + \frac{2v}{r}$; Q. E. I.

Corollarium 1.

84. Celeritas in M igitur tanta eſt, quanta foret in P, ſi corpus eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ per AP eadem in ſingulis altitudinibus potentia p ſollicitatum aſcendiſſet.

Corollarium 2.

85. Celeritas igitur non pendet a natura curuae, ſed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit dx erit $dv = -p\,dx$ vel $dv = p\,dx$ prout corpus vel aſcendit vel deſcendit.

Corollarium 3.

86. Cum ſit $v = b - \int p\,dx$, ſi ſumatur abſciſſa x tanta uti AC, pro qua ſit $\int p\,dx = b$; erit corporis in illa altitudine B celeritas $= o$. Corpus igitur in B vſque aſcendit, ibique quieſcet, continuo vero ex B deſcendet per BMA.

Co-

Corollarium 4.

87. Si ascensus per AMB cum ascensu rectilineo per APC comparetur, erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp, vt Mm ad Pp i. e. vt ds ad dx.

Corollarium 5.

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp constantem, erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione nempe ea, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A, seu quam habet longitudo AB ad AC.

Corollarium 6.

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$, ideoque vis centrifuga $= -\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{-2(b - \int p\,dx)\,dx\,ddy}{ds^3}$. Quare pressio totalis erit $= \frac{p\,ds^2\,dy - 2(b - \int p\,dx)\,dx\,ddy}{ds^3}$.

Scholion 1.

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curua et potentia sollicitante inuenta sunt, celeritas in singulis punctis, tempus per quemvis arcum, et pressio in singula curuae puncta: ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis, reliquae tres possunt inueniri. Ex quo decem nascentur problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebunt.

Scholion 2.

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directiones potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel conuergentes ad centrum virium, vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam directio inter quaesita ponatur tunc ob sex res in computum ducendas, ex ternis quibusque, reliquae tres inuenientur; hincque viginti orientur problemata.

Scholion 3.

92. Orientur porro problemata indeterminata, vt si loco temporis per quamuis curuae portionem tantum integrum tempus per AMB daretur, tum enim infinitae solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus vel ascensus integri considerentur super eiusdem curuae variis partibus, eorumque ratio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc genus pertinet quaestio de inuenienda curua, super qua omnes descensus ad datum punctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas vltimo pertractabimus. Nunc autem primum curuam et potentiam sollicitantem tanquam datas accipiemus et problemata eo pertinentia soluemus. Deinceps vero ex aliis datis, quemadmodum reliqua sint inuenienda, monstrabimus.

PRO-

PROPOSITIO 13.

Problema.

Tabula III. Fig. 4.

93. *Si potentia sollicitans fuerit uniformis et vbique deorsum tendat, determinare descensum corporis super data curua* AM *in* A *ex quiete incipientem, atque pressionem, quam curua, in singulis punctis* M *sustinet.*

Solutio.

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF, atque applicata rectangula MP, fit $AP = x$, $PM = y$, curua $AM = s$. Ponatur potentia $MF = g$, existente vi grauitatis $= 1$, et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{gdx}{ds}$ (83.). Quia hoc casu vis tangentialis accelerat, erit $dv = gdx$, et $v = gx$, ob celeritatem in $A = o$. Deinde quia radius osculi in MO directus est $= \frac{+ds^3}{dx\,ddy}$, posito dx constante, erit vis centrifuga $= \frac{+2vdx\,ddy}{ds^3}$, cuius directio est MN. Secundum eandem plagam vero premit vis normalis $\frac{gdy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curua in M sustinet secundum MN est $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdx\,ddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2gxdx\,ddy}{ds^3}$ ob $v = gx$. Tempus vero quo corpus arcum AM percurrit est $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per quam descendit, pendet, atque tanta est, quantam idem corpus ex AP delapsum et ab eadem potentia g sollicitatum acquirit.

Corollarium 2.

95. In quacunque igitur curua corpus a potentia vniformi g sollicitatum ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus percursis proportionales, est enim celeritas, vt $\sqrt{v}$ i. e. vt $\sqrt{gx}$.

Corollarium 3.

96. Tempus quo primum elementum Aa percurritur, est $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ euanescente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s = nx$, erit tempus per Aa infinite paruum, ideoque tempus AM finitum, nisi curua vel ascendat inter A et M, supra A vel in infinitum progrediatur. At si angulus PAa fuerit rectus, erit ipso puncto A, $s^n = \alpha x$, existente n numero vnitate maiore, ideoque $\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, et $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2s^{\frac{2-n}{2}}}{2-n}\sqrt{\frac{\alpha}{g}}$. Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite paruum, et tempus per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2 tempus per primum elementum Aa erit infinite magnum, seu corpus ex A nunquam egredietur.

Co-

Corollarium 4.

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est infinite paruus. Quare in casu quo tangens curuae in A ad AP est normalis, corpus non descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite paruus.

Scholion 1.

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite paruo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM esse finitum, cum enim corpus motu accelerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describentur, et hancob rem tempus debebit esse finitum. Exemplis autem sequentibus omnia illustrabuntur.

Exemplum 1.

Tabula III. Fig. 5.

99. Sit linea AM recta vtcunque inclinata ad verticalem AP, atque cosinus ang. $A = n$, erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM descendit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\,AM}{\sqrt{g \cdot AP}}$. Seu tempus per lineam vtcunque inclinatam est directe, vt radix ex ipsa linea et inverse, vt radix ex cosinu anguli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem $= 0$, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae est $= g\sqrt{(1-n^2)} = \frac{g \cdot PM}{AM}$.

Corollarium 5.

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK, vt $\sqrt{AM}$ ad $\sqrt{AK}$. At tempus per AM est ad tempus per AP vt AM ad AP. (88). Qua-

re si fuerit $AM:AP = \sqrt{AM}:\sqrt{AK}$, seu $AM:AP = AP:AK$, quod euenit si PK est in AM perpendicularis tum tempus descensus per AK aequale est tempori descensus per AP.

Corollarium 6.

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale esse tempori descensus per AP. Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$; Quare cum sit tempus per AP ad tempus per KP vt $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{1}}$ ad $\sqrt{KP}:\sqrt{\frac{PK}{AP}}$, erit haec ratio aequalitatis.

Corollarium 7.

Tabula IV. Fig. 1.

102. Ex hoc perspicitur in circulo APPB omnes descensus per chordas AP ex puncto supremo A ductas, nec non omnes descensus per chordas ad punctum infimum B ductas aequalibus fieri temporibus; eo scilicet tempore, quo corpus per diametrum AB perpendiculariter delabitur.

Exemplum 2.

Tabula IV. Fig. 2.

103. Si curua AMB fuerit circulus, ac radius $BC = a$ et AP tangat circulum, erit $(a-y)^2 + x^2 = a^2$ seu $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Habebitur ergo $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, et ob $v = gx$ et $r = a$ erit vis centrifuga $= \frac{2gx}{a}$; atque ob $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ tota pressio, quam circulus in M sustinet $= \frac{3gx}{a}$. Triplo igitur maior est tota pressio, quam sola vis normalis. Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

=

$= \int \frac{a\,dx}{\sqrt{g(a^2x - x^3)}}$, cuius integratio neque a circuli nec hyperbolae quadratura pendet, ſed ope rectificationis curuae elaſticae conſtrui poteſt. Tempus interim per quadrantem AB eſt $= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{etc.}\right)$.

Corollarium 8.

104. Cum corpus ad infimum punctum B peruenerit, ibi habebit celeritatem altitudini ga debitam. Hac igitur aſcendet in altero quadrante BD pertingetque ad D, vbi eius celeritas evaneſcet, ideoque rurſus deſcendet ad B tumque ad A per BA reaſcendet. Similis vero erit aſcenſus deſcenſui per quadrantem, quia corpus ſiue aſcendat ſiue deſcendat in iisdem punctis eandem habet celeritatem.

Scholion 2.

105. Alia exempla non afferimus, cum in ſequentibus, vbi plures deſcenſus ad punctum fixum ſuper data linea conſiderabimus, plura ſimus allaturi. Nunc vero primum eas quaeſtiones evolvemus, quae pertinent ad motum ſuper data linea, ex dato puncto fixo a quiete inceptum: cuius modi eſt problema ſequens.

PROPOSITIO 14.

Problema.

106. *Si fuerint infinitae curuae ſimiles* AM, AM *etc. ex puncto fixo* A *initium ſumentes; inuenire cur-* Tabula IV. Fig. 3.

curuam CMM, *ab illis curuis arcus* AM, AM etc. *abscindentem, qui a descendente super iis corpore aequalibus temporibus percurrantur; existente vt ante potentia sollicitante vniformi et vbique deorsum directa.*

Solutio.

Ex infinitis curuis datis sumatur vna quaecunque AM, cuius parameter sit a. Positoque $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$, et existente vt ante potentia sollicitante $= g$; descendat corpus super curua AM, erit celeritas in M debita altitudini gx. Tempus ergo descensus super AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Ab omnibus ergo curuis AM, AM etc. tanti arcus sunt abscindendi, vt pro iis sit $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas constans. At $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ad alias curuas referetur, si praeter s et x etiam parameter a ponatur variabilis. Posito igitur in $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili, quantitas $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ponenda est $=$ constanti, nempe ei tempori quo omnes descensus fieri debent. Sit hoc tempus $= k$ erit $k = \int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ in singulis curuis. Quare si $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur vt etiam a variabile ponatur, hoc differentiale nihilo aequale est ponendum. Ad hoc differentiale inueniendum sit $ds = pdx$, eritque p, quia omnes curuae ponuntur similes, functio in qua a et x nullum dimensionum numerum simul constituunt. Habebimus ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$: hoc differentiatum posito quoque a variabili dabit

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda$, quod fieri debet $= 0$. Quantitas q vero sequenti modo inuenietur. Quia est $k = \int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; in quantitate k, variabiles a et x dimensionum numerum constituent $\frac{1}{2}$. Ostendi autem alibi in Tom. IX. Comment. tum fore $\frac{px}{\sqrt{gx}} + qa = \frac{k}{2}$. Ex quo inuenitur $q = \frac{k}{2a} - \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}$. Habebitur ergo $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{kda}{2a} - \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = 0$. Quae est aequatio pro curua quaesita. At si aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM desideretur, ex aequatione pro quaque curuarum AM, valor ipsius a in x et y inuentus substitui debet. Q. E. I.

Corollarium 1.

107. Aequatio etiam primo inuenta $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{kda}{2a}$ sufficit ad curuam CMM inueniendam. Nam pro quauis abscissa AP $= x$ ex ea inuenitur a parameter eius curuae AM, cuius punctum M respondens assumtae abscissae x est in curua quaesita CMM.

Corollarium 2.

108. Cum autem haec aequatio sit differentialis, ideoque ad plures curuas pro constante quae adiicitur, pertineat; notandum est in additione constantis, eam tantum solutioni esse conuenientem, quae pro data curua seu pro dato ipsius a valore det abscissam x tantum arcum AM abscindentem, qui tempore k descensu absoluatur.

Corollarium 3.

109. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem $AC = b$, erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio $\frac{p\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{p\,da\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$. In cuius integratione id est faciendum, vt curua per punctum C transeat.

Scholion 1.

110. Erit autem semper recta verticalis AC species curuarum AM; quae oritur, si parameter a vel infinite magna vel infinite parua accipiatur. Quare commodissime tempus constans k per descensum per verticalem AC, quippe speciem curuarum AM, exprimitur. Atque in constructione aequationis inuentae $\frac{p\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{p\,da\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ tanta constans est addenda, vt posito $x = b$, fiat a vel infinitum vel nihil, prout ille vel iste valor ipsius a recta AC respondeat.

Scholion 2.

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione opus est, ad quam inueniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili reipsa obtinetur q; atque hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commodissime vero his casibus problema soluetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi k vel $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$ aequale ponatur, et loco a eius valor in x et y substituatur ex aequatione pro curuis datis. Atque hoc mo-

modo ſolutio in promtu eſt non ſolum pro curuis ſimilibus, ſed diſſimilibus etiam, ſi modo tempora deſcenſus per quantitates finitas exprimi poſſunt.

Exemplum 1.

112. Si omnes hae curuae AM fuerint rectae diuerſimode ad verticalem AC inclinatae, erit $y = nx$ et $s = x\sqrt{(1+n^2)}$ ubi n tanquam parameter eſt conſideranda. Erit ergo $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int\frac{dx\sqrt{(1+n^2)}}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x(1+n^2)}}{\sqrt{g}}$ quod aequale poni debet ipſi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Erit itaque $x(1+n^2) = b$. Cum autem n ſit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex aequatione $y = nx$: quo facto prodibit pro curua CMM aequatio inter coordinatas orthogonales x et y iſta $y^2 + x^2 = bx$, quae eſt pro circulo, cuius diameter eſt recta $AC = b$.

Scholion 3.

113. Hic caſus eſt ille ipſe caſus ante pertractatus (102), ibi enim oſtenſum eſt corpus per omnes chordas in circulo ex puncto ſupremo eductas aequalibus temporibus deſcendere. Pertinet hic quidem caſus non ad curuas ſimiles; ſed hoc exemplum attulimus ad caſum Scholii 2. illuſtrandum, quia pro rectis hisce tempora deſcenſus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia exempla vero curuas ſimiles, vti propoſitio poſtulat, complectentur.

Exemplum 2.

114. Sint curuae A M, A M omnes circuli tangentes verticalem A C in A. Ponatur radius cuiusque eorum $= a$, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ atque $a = \frac{y^2 + x^2}{2y}$. Hi circuli vero omnes funt curuae fimiles, quia a, y et x in aequatione eundem dimenfionum numerum tenent, feu homogeneitatem complent fola. Radius igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem ex illa aequatione $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, quare erit $p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, ideoque praefcriptam habet proprietatem, vt a et x dimenfionum numerus fit nullus. Hanc ob rem pro curua C M M haec habebitur aequatio $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$, feu haec $\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{xda - adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}}$. Quae aequatio conftrui poteft, pofito enim $x = au$, prodit $\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{-du}{\sqrt{(u - u^3)}}$ in qua indeterminatae funt a fe inuicem feparatae. Quo autem aequatio inter coordinatas x et y pro curua C M M obtineatur, ponatur loco a valor $\frac{y^2 + x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2dy + 2yxdx - x^2dy}{2y^2}$. Quibus fubftitutis fequens prodit aequatio differentialis $-xdy + ydx = \frac{(y^2dy + 2yxdx - x^2dy)\sqrt{bx}}{y^2 + x^2}$. Quae ita integrari debet ut pofito $x = b$ fiat $y = o$, quia curua per punctum C transire debet.

Corollarium 4.

115. Ex hac aequatione tangens curuae C M M in fingulis punctis cognofcitur, et ex pofitione tangentis innotefcit angulus A M M, quo cur-

curua CMM quamlibet datarum interſecat. Erit ſcilicet tangens anguli AMM $= \frac{y}{x - \sqrt{bx}}$. Hic ergo angulus eſt rectus in C, ob $x = b$, ſeu curua CMM in C ad AC eſt normalis.

Corollarium 5.

116. Si b vel maior vel minor accipiatur curua CMM alia quoque erit, hocque modo infinitae orientur curuae a circulis arcus iſochronos abſcindentes. Haeque curuae omnes inter ſe erunt ſimiles, ob parametrum b, quae in aequatione cum x et y homogeneitatem conſtituit. Data ergo vna curua CMM innumerabiles aliae ex ea conſtrui poſſunt, abſciſſis ſcilicet et applicatis curuae CMM in eadem ratione augendis vel diminuendis, in qua AC ſeu b augetur vel diminuitur.

Exemplum 3.

117. Sint curuae AM, AM omnes cycloides cuſpides in A habentes et tangentes verticalem AC in A. Poſita parametro cuiusque cycloidis AM ſeu dupla diametro circuli generatoris $= a$; erit ex natura cycloidis $s = a - V(a^2 - 2ax)$ atque $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$; hincque $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$. Hoc ergo caſu eſt $p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$, functio ipſarum a et x nullius dimenſionis vt requiritur. Quare pro curua CMM reperitur iſta aequatio $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}}$ $= \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ ſeu $\frac{xda - adx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{b}}{a}$. Si

aequa-

aequatio inter coordinatas orthogonales x et y desideretur, ex aequatione $y = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ seu huius differentiali posita quoque a variabili, valor ipsius a debet substitui. Haec vero aequatio differentiata posito a quoque variabili dat $ady - yda = \frac{adx\sqrt{2ax} - xda\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ seu $\frac{ady-yda}{\sqrt{2a}} = \frac{axdx - x^2da}{\sqrt{(a^2x-2ax^2)}}$. Quae abit in hanc $\frac{ady-yda}{a^2\sqrt{2}} = \frac{axdx - x^2da}{a^2\sqrt{(ax-2x^2)}}$. Superior vero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc, $\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{axda - a^2dx}{4a^3\sqrt{(ax-2x^2)}}$. Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cuius integralis est $\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{(ax-2x^2)}}{2a}$. Ex qua valor ipsius a erutus fit $\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b-x}$ et $\sqrt{(ax-2x^2)} = \frac{yx\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b-x}$. Quibus valoribus in aequatione $\frac{(xdy-ydx)\sqrt{a} + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax-2x^2)}} = dy\sqrt{b}$, quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da, substitutis prodibit $\frac{xdy - ydx - bdy}{\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt{x}}$ aequatio pro curua quaesita CMM.

Corollarium 6.

118. Ex hac aequatione inuenitur tangens anguli, quem curua CM cum applicata PM constituit nempe $\frac{dx}{dy} = \frac{-(b-x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}$. Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois AM cum

cum applicata P M conſtituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{\alpha\sqrt{2}}$.
Eliminato vero *a* erit iſta tangens $= \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}$.
Quare cum horum angulorum alter alterius ſit complementum, ſumto illius deinceps poſito, erit angulus, quem curua C M M cum qualibet datarum AM conſtituit, rectus. Conſequenter curva C M M eſt traiectoria orthogonalis omnium cycloidum datarum A M, A M &c.

Corollarium 7.

119. Sumto A C alius magnitudinis, aliae quoque curuae CMM prodibunt, et ſic infinitae traiectoriae orthogonales inueniuntur, quae omnes inter ſe ſunt ſimiles. Data ergo vna facile quotquot libuerit, conſtruere licebit.

Scholion 4.

120. Omnes hae curuae arcus abſcindentes iſochronos, quaecunque fuerint curuae ſecandae, ſemper conſtrui poſſunt, etiamſi id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curuis arcus poſſunt abſcindi, qui dato tempore deſcenſu abſoluantur, hocque modo puncta quotlibet curuaé quaeſitae inueniuntur. Si quidem curuae ſecandae ſunt algebraicae, aequatio pro curua ſecante ſemper ita eſt comparata, ut factis debitis ſubſtitutionibus indeterminatae a ſe inuicem poſſint ſeparari. At ſi curuae ſecandae differentiali

tiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curua fecante rariffime feparationem indeterminatarum admittit. Caufa eft, quod peculiari modo, quo in hoc cycloidum cafu ufus fum, parameter a eliminari debeat; eaque fubftitutio ad feparationem non deducat.

Scholion 5.

121. Deinde obferuandum eft, omnes curuas arcus ifochronos abfcindentes, quarum numerus pro vario ipfius b valore eft infinitus, inter fe fimiles effe, fi quidem curuae fecandae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ in qua cum p fit functio ipfarum a et x nullius dimenfionis quantitates a, b et x homogeneitatem conftituunt. At ex aequatione curuarum fecundarum, quia in ea a, x et y vbique eundem dimenfionum numerum conficere ponuntur, valor ipfius a erit functio ipfarum x et y vnius dimenfionis. Quare eo fubftituto loco a habebitur aequatio pro curua fecante, in qua b, x et y vbique eundem dimenfionum numerum conftituunt. Confequenter b variabili pofito oriuntur infinitae curuae fimiles inter fe refpectu puncti A. Data ergo vnica, reliquae facile ex fimilitudinis ratione defcribuntur.

Scholion 6.

122. Materia haec de arcubus ifochronis abfcindendis iam praeterito feculo eft pertractata in

in Act. Erud. Lipſ. A. 1697. a Cel. Ioh. Bernullio, atque poſtmodum in Comment. Acad. Pariſ. a Cel. Saurino, qui vero alia methodo ſunt vſi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in noſtris Comment. pro A. 1734. tradidi, tanquam commodiſſimam ad huiusmodi problemata ſoluenda. In his vero locis Viri Cel. curuas quoque ſimiles tantum, vt ego, conſiderauerunt, ſine dubio, quia pro curuis diſſimilibus ſolutio fit nimis difficilis et ſaepe etiam vires ſuperat. Vocantur vero in locis citatis hae curuae ſynchronae, quia arcus ſimul percurſi abſcinduntur.

Scholion 7.

123. Ex mea diſſertatione Tomi IX. Comment. Acad. Petrop. apparet, has curuas ſynchronas ſimili modo poſſe inveniri, ſi curuae datae etiam non fuerint ſimiles, ſed eiusmodi tamen, vt poſito $ds = p\,dx$, in p quantitates a et x datum dimenſionum numerum conſtituant; tum enim aeque facile valor literae q inuenitur. Vt ſi numerus dimenſionum ipſarum a et x in p fuerit n, aequatio pro curua ſecante reperietur haec. $\frac{p\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{p\,da\sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1)\,da\sqrt{b}}{a}$. Quare ſi fuerit $n = -\frac{1}{2}$, vt ſi fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$ ideoque $x = ma$, ſeu x in data ratione ad parametrum a eſt capiendum: quo igitur caſu conſtructio ſynchronarum eſt facillima. At ſi p

non huiusmodi habuerit valorem, ex supra citata dissertatione mea intelligitur, quo modo in aequationem quaesitam sit inquirendum.

PROPOSITIO 15.

Problema.

Tabula IV. Fig. 4.

124. *Si fuerit, vt ante infinitae curuae similes* AM, AM *etc. et rectapositione data* DE; *invenire eam curuam* AMN, *super qua corpus tempore breuissimo ex* A *ad rectam* DE *descensu peruenit.*

Solutio.

Descripta per Prop. praeced. quacunque curva CMM arcus AM isochronos abscindente, ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifestum est super curua AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore breuissimo ad rectam GMH esse venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curuam CMM cadunt, ideoque longiore tempore opus est, quo corpus ad ea perveniat. Iam, quoniam omnes curuae a curuis AM, AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (121). concipiatur ex iis una quae rectam DE tangat, dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curuarum CMM respectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM, atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curua AM rectae GH. Quare

re cum corpus per AM tempore breuiſſimo ad GH perueniat, neceſſe eſt, vt quoque tempore breuiſſimo ſuper curua AMN ad rectam DE perveniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

125. Ex hoc perſpicitur, ſi recta DE fuerit horizontalis, corpus deſcenſu per verticalem AC ad eam citiſſime peruenire, ob tangentem curuae CMM in C horizontalem: id quod quidem per ſe perſpicuum eſt.

Corollarium 2.

126. Si ergo curuae AM, AM fuerint cycloides vt in exemplo 3. Propoſ. praec. poſuimus, corpus ſuper ea cycloide celerrime ad rectam DE peruenit, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurrit; quia angulus, quem quaeque cyclois cum curua CM conſtituit, eſt rectus.

Corollarium 3.

127. Si igitur recta DE fuerit verticalis ſeu parallela ipſi AC, portio cycloidis AMM erit dimidia cyclois. Quare ſuper dimidia cycloide motus horizontalis eſt celerrimus.

Corollarium 4.

128. Si curuae AM, AM ſint rectae ex puncto A ad rectam poſitionem datam DE ductae, corpus ſuper ea AM citiſſime ad DE perveniet, quae eſt chorda circuli per A tranſeuntis et centrum in verticali AB habentis, atque rectam DE tangentis (112.).

Tabula IV. Fig. 5.

 Co-

Corollarium 5.

129. Si igitur angulus DCA fuerit *n* graduum erit angulus BAM $\frac{90+n}{2}$ graduum, et angulus AMC graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu ducta horizontali AGH, anguloque DGH bisecto recta GF, erit quaesita linea AM parallela ipsi GF.

Corollarium 6.

130. Quare si linea DE fuerit verticalis corpus ad eam citissime perueniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclinata. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerrime progreditur.

Scholion.

Tabula IV. Fig. 4.

131. Simili modo quoque inueniri potest, super quanam infinitarum curuarum similium AM, AM corpus descensu citissime ad datam curuam perueniat. Nam si linea GMH fuerit curua quaecunque tangens curuam CMM in M, corpus super hac curua AM celerrime ad curuam GMH perueniet, si quidem tota curua GMH extra curuam CMM fuerit sita. Eodem etiam modo posset determinari, si curuae AM, AM non fuerint similes, super quanam corpus celerrime ad datam lineam GH perueniat. Ex infinitis enim curuis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaerenda, quae datam GMH tangat, eritque ea curua AM, quae per punctum contactus transit ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curuas CMM inuenire, multoque

toque difficilius eam determinare, quae datam lineam tangat; quaestionem ad curuas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16.
Theorema.

132. *Tempora descensuum, quibus corpus curuas* AM *et* A*m similes similiterque ex puncto* A *positas percurrit, sunt in ratione subduplicata laterum homologorum.*

Tabula IV. Fig. 6.

Demonstratio.

Quia curuae AM, A*m* sunt similes, erunt AM: A*m*; AP: A*p*; et PM: *pm* in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; sit haec ratio laterum homologorum N: *n*. Quia celeritas in M est ad celeritatem in *m*, vt $\sqrt{AP}$ ad $\sqrt{Ap}$, erunt celeritates in M et *m* in ratione subduplicata laterum homologorum. Sumantur jam ex M et *m* elementa similia rationem scilicet N ad *n* tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur in ratione composita ex directa elementorum, i. e. N ad *n* et reciproca celeritatum, i. e. $\sqrt{N}$: $\sqrt{n}$. Ex quo sequitur, tempora, quibus curuarum AM, A*m* elementa homologa percurruntur, esse in ratione subduplicata laterum homologorum. Quare cum haec ratio sit constans, tempora, quibus totae curuae AM et A*m* percurruntur, eandem hanc rationem tenebunt. Q. E. D.

Corollarium 1.

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes similiterque positi descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

Corollarium 2.

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describunt, oscillationes absoluent temporibus, quae rationem subduplicatam longitudinum pendulorum tenebunt.

Corollarium 3.

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora pendula non circulos describant, sed alias curuas, dummodo eae fuerint inter se similes, similesque arcus absoluantur.

Scholion.

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem semper ponimus vniformem, deorsumque tendentem, etiamsi hanc conditionem omiserimus. Hanc enim hypothesin ante pertractare constituimus, quam ad alias sumus progressuri.

PROPOSITIO 17.

Problema

Tabula V. Fig. 1.

137. *Existente potentia sollicitante vniformi tendenteque deorsum, moueatur corpus super curua quacunque* AM *cum data celeritate initiali in* A: *deter-*

terminare motum corporis ſuper hac curua, et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.

Solutio.

Poſita potentia ſollicitante g, et celeritate initiali in A debita altitudini b, praetereaque $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$ et celeritate in M debita altitudini v. His poſitis erit $dv = gdx$, (93.) vnde fit $v = b + gx$. Porroque tempus per arcum AM erit $\int \frac{ds\, 1}{\sqrt{(b+gx)}}$. Deinde preſſio totalis, quam ſuſtinet curua ſecundum directionem normalis MN erit $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (93.) $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2(b+gx)dxddy}{ds^3}$ exiſtente dx elemento conſtante. Hoc enim tantum differt haec ſolutio a ſolutione Prop. 13. quod ibi eſſet $v = gx$, hic vero ſit $v = b + gx$. Ex his igitur formulis tum motus tum preſſio cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

138. Si linea AM fuerit recta, jam ex §. 88. intelligitur tempus per AM eſſe ad tempus deſcenſus per AP eadem celeritate $\sqrt{b}$ incepti, vt eſt AM ad AP. Preſſio vero ob euaneſcentem vim centrifugam erit $= \frac{gdy}{ds}$ ſeu conſtans.

Corollarium 2.

139. Patet etiam hoc caſu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem ab altitudine tantum pendere. Quare quaecunque fuerit curua AM celeritas corporis in quouis puncto innoteſcit, etiam incognita curuae natura.

Exem-

Exemplum 1.

140. Sit curua AM parabola verticem in A et axem verticalem AP habens; erit ergo posita eius parametro $= a$, $y^2 = ax$; et $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+4ax)}}{2\sqrt{ax}}$. Habebitur ergo tempus per AM $= \int \frac{dx\sqrt{(a+4x)}}{2\sqrt{x}\,(b+gx)}$. Deinde cum posito dx constante sit $ddy = \frac{-a\,dx^2}{4x\sqrt{ax}}$, erit $\frac{dx\,ddy}{ds^3} = \frac{-2a}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$. Consequenter pressio totalis est $= \frac{ga}{\sqrt{(a^2+4ax)}} - \frac{4a(b+gx)}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$ $= \frac{ga^2-4ab}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$.

Corollarium 3.

141. Si igitur est $b = \frac{ga}{4}$, pressio curuae evanescit. Corpus ideo hoc casu libere in hac parabola moueri posset; qui est etiam ipse casus praecd. Libro pertractatus.

Corollarium 4.

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4}ga$ erit tempus per arcum AM $= \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$. Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abscissam AP a quiete incepti.

Corollarium 5.

143. Si $b > \frac{1}{4}ga$ pressio fit negatiua, tum igitur curua in plagam axi AP oppositam premitur. A si $b < \frac{1}{4}ga$ directio pressionis erit in MN. Quantitas vero pressionis in singulis curuae punctis erit reciproce vt radius osculi.

Exem-

Exemplum 2.

144. Si curua AM fuerit circulus; cuius radius $= a$, et centrum in verticali AP sit positum; erit $y^2 = 2ax - x^2$, vnde $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Erit ergo tempus, quo arcus AM percurritur $= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}$. Atque cum sit $\frac{dx\,ddy}{ds^2} = \frac{-1}{a}$, erit pressio, quam circulus in puncto M patitur $= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b+gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}$.

Corollarium 6.

145. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = o$; fit autem $= \infty$; seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (97.) patet. Nam, quia curua in A est normalis in AP, neque radius osculi infinite paruus, corpus descendere non potest.

Corollarium 7.

146. Si est $b = \frac{ga}{2}$, seu celeritas initialis, tanta, quantam corpus acquirit cadendo ex altitudine dimidii radii circuli; pressio totalis cum vi centrifuga erit conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$, erit itaque altitudini percursae proportionalis.

DEFINITIO 3.

147. Motus oscillatorius est motus reciprocus, quo corpus alternatim accedit et recedit ab initio motus M. *Ita si corpus super curua* Tabula V. Fig. 2.

 MAN

MAN. *moueatur, primo descendet super* MA, *tum ascendet in* AN, *donec celeritatem amiserit; deinde ex* N *iterum descendet ascendetque in arcu* AM, *quo facto iterum descendet, hancque periodum continuabit: Atque talis motus oscillatorius vocatur.*

Corollarium 1.

148. Motus oscillatorius ergo consistit in alternis descensibus et ascensibus super linea curua; atque descensu motu accelerato mouetur, ascensu vero celeritatem acquisitam rursus perdit.

Corollarium 2.

149. Quilibet ergo descensus super eadem curuae parte fit, super qua praecedens ascensus contigit. Quare cum celeritas corporis ab altitudine tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curuae puncto siue in ascensu siue in descensu eandem habet celeritatem.

Corollarium 3.

150. Ex quo sequitur tempus descensus per MA, aequale esse tempori ascensus per AM; similique modo tempus ascensus per AN tempori descensus per NA.

Corollarium 4.

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N vsque perueniet, quod aeque altum est ac punctum M, ex quo erat delapsum. Sequitur hoc ex eo, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

Co-

Corollarium 5.

152. Si curua AN fimilis et aequalis fuerit curuae AM, tum motus per AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes afcenfus et defcenfus aequalibus fient temporibus.

Corollarium 6.

153. Si curuae MA, AN fuerint diffimiles, tempus faltem per MAN aequale erit tempori per NAM, feu tempora acceffionum et receffionum erunt inter fe aequalia.

Corollarium 7.

154. Quia corpus femper ad eandem altitudinem pertinget, manifeftum eft hunc motum ofcillatorium perpetuo durare debere.

Corollarium 8.

155. Curua ergo ad motum ofcillatorium producendum apta eft omnis curua, quae de puncto infimo A duos habet arcus afcendentes, vt MAN.

Scholion I.

156. Expofuimus hic proprietates motus ofcillatorii, quales ex expofita hypothefi potentiae follicitantis vniformis et perpetuo deorfum tendentis confequuntur. Eaedem vero quoque locum habent; fi potentia vtcunque ab altitudine pendeat, vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in fequentibus plenius apparebit. In medio refiftente vero res aliter fe habet, nam

nam neque ascensus per datam curuam similis est descensui per eandem, neque in ascensu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descensu erat delapsum.

Scholion 2.

157. Vocari solet motus per MAN itus sequens vero motus per NAM reditus, consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus et reditibus. Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu constans, ab aliis tam itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscillationis vocem accipiemus, ita vt vna oscillatio ex vno itu vnoque reditu constet. Itus vero atque reditus vterque vno ascensu vnoque descensu consistit, atque ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus complectetur. Cum igitur tempus itus aequale sit reditus tempori, erit tempus vnius oscillationis duplo maius quam tempus vnius itus seu reditus.

Corollarium 9.

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, si motum oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus solos super duabus curuae partibus AM, AN considerare opus habebimus.

Scholion 3.

159. Nihil refert vtrum arcus AM et AN vnam curuam continuam constituant, an vero sint diuersae curuae, dummodo in A ita sint con-

coniunctae, vt communem habeant tangentem: alias enim motus perturbaretur. Quare ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, vt motus super curuis AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad oscillationes determinandas, tum ad relationem inter maiores minoresque oscillationes inueniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, quae maioribus arcubus absoluuntur, minores vero, quae minoribus.

Scholion 4.

160. Ex Prop. 6. §. 49. perspicitur, quomodo oscillationes ope pendulorum effici queant; scilicet ope euolutae curuarum AM et AN, circum quas filum circumducitur. Ab Hugenio etiam iste pendulorum vsus ad oscillationes accommodatur, vt vel ex eius instituto, quo eo motu ad horologia perficienda vtitur apparet. Eaedem vero difficultates, quas loco cit. commemorauimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti super datis lineis hic tantum inuestigabimus, mentemque ab omnibus pendulorum circumstantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 13.

Problema.

Tabula V. Fig. 3.

161. *Existente potentia sollicitante vniformi et deorsum directa, determinare tempus ascensus seu descensus per quemuis circuli arcum* EA *in puncto circuli infimo* A *terminatum.*

 So-

Solutio.

Sit C circuli centrum, erit CA radius verticalis seu parallelus directioni potentiae g. Ponatur $AC = a$, et arcus AE altitudo $AG = b$, erit celeritas in infimo puncto A debita altitudini gb, quia corpus ex E descendens tantam habebit celeritatem, cum in A peruenerit. Atque tantam celeritatem corpus in A habere debet, vt ad E vsque ascendere possit. Consideretur quodvis arcus AE elementum Mm, et dicatur $AP = x$, erit $PM = \sqrt{(2ax - x^2)}$ et $Mm = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Celeritas vero in M erit debita altitudini $g.GP = gb - gx$. (93). Tempus igitur, quo elementum Mm siue ascensu siue descensu percurritur, erit $= \frac{adx}{\sqrt{g(b-x)(2ax-x^2)}}$. Quod quia integrari non potest per series eius integrale exprimemus. Est autem posito $2a = c$, $\frac{1}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bc}}(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1 . x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc} + \frac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2+2bc+3c^2)}{8b^2b^2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3+3b^2c+3c^2+5c^3)}{16b^3c^3} +$ etc.). Hoc ergo per $\frac{adx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus AM absoluitur $= \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}}(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3} +$ etc.). Totum vero tempus per arcum EA prodibit, si fiat $x = b$, et ratio perispheriae ad diametrum $= \pi : 1$. quo posito habebitur, $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} +$ etc.) $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} +$ etc.). Vbi coefficien-

tes

tes 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{64}$ etc. ſunt quadrata coefficientium 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ qui prodeunt ſi $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in ſeriem reſoluitur. Ex hac igitur ſerie tempus vero proxime poteſt inueniri. Q. E. I.

Corollarium 1.

162. Quo maior igitur arcus EA eſt, eo maius quoque erit tempus, quo is percurritur. Fit enim poſito $b = 2a = c$, tempus infinitum; quia corpus deſcenſu ſemicirculum nequaquam deſcribere poteſt.

Corollarium 2.

163. Si igitur corpus oſcillatorio motu mouetur in arcu circuli EAF, erit tempus vnius itus vel reditus duplo maius, quam tempus vnius aſcenſus vel deſcenſus; quia tempus per ANF aequale eſt tempori per AMG. Quare vnius itus reditusve tempus, ſeu tempus dimidiae oſcillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}\right)$. Integra vero oſcillatio tempore duplo maiore abſoluetur.

Scholion 1.

164. Series haec tempus exprimens ſtatim hoc modo poteſt inueniri. Temporis elementum in hos factores reſoluatur $\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}} \times \frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$ horumque poſterior tantum in ſeriem commutetur ſcilicet hanc $\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1.x}{2.c\sqrt{b}} + \frac{1.3x2}{2.4c^2\sqrt{c}} +$ etc. poſito $2a = c$ Quia autem poſt integrationem fit $x = b$ erit $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$;

$= \pi$; $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1\pi b}{2}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.\pi b^2}{2.4}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ $= \frac{1.3.5.\pi b^3}{2.4.6}$. etc. Ex quibus totum descensus tempus vt ante colligitur $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1\,b}{4\,c} + \frac{9\,b^2}{64\,c^2} + \frac{225\,b^3}{2304\,c^3} + \text{etc.}\right)$.

Scholion 2.

165. Quo appareat a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei $1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} +$ etc. pendeat, pono $\frac{b}{c} = \frac{tt}{1+tt}$ et summam seriei $= e^{\int \frac{qdt}{t}}$ denotante e numerum, cuius log. est $= 1$. His positis ex mea series summandi methodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII. exposita inuenitur sequens aequatio $dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{tdt}{(1+tt)^2}$. Ex qua aequatione, si construi posset, inueniretur, q in t, indeque ipsa summa per t seu per $\frac{b}{c}$ Quia autem aequatio constructionem non admittit in se spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempora in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ex ea constructio aequationis inuentae sequitur.

Corollarium 3.

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absoluitur, ponitur infinite paruus, tempus per eum tamen non fit infinite paruum. Euanescit enim in expressione temporis tantum b. eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE euanescentem $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Co-

Corollarium 4.

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EAF euanescentem, fient infinite paruae, tempore tamen absoluentur finito. Scilicet tempus vnius itus vel reditus seu tempus vnius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 5.

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite paruarum sunt in ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

Corollarium 6.

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Nam vtcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinite paruo motum agit, constantem habebit valorem.

Corollarium 7.

170. Intelligitur, etiamsi curua EAF non fuerit circulus sed curua quaecunque, tum etiam quae hic allata sunt ad oscillationes infinite paruas super hac curua pertinere. Tum vero loco radii *a* radius osculi huius curuae in puncto infimo A est accipiendus.

Corollarium 8.

171. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite paruo EAF efficiuntur ope penduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscil-

lationum infinite paruarum pendulorum funt directe vt radix quadrata ex longitudine penduli et reciproce vt radix quadrata ex potentia sollicitante.

Corollarium 9.

172. Si curua ANF non fuerit aequalis curuae AME pro ofcillationibus infinite paruis radium ofculi in A tantum confiderare fufficit. Sit is $= \alpha$ erit tempus afcenfus per arcum AF infinite paruum $= \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$ atque cum tempus defcenfus per arcum AME euanefcentem fit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ erit tempus vnius itus feu dimidiae ofcillationis fuper curua compofita EAE $= \frac{\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}$.

Corollarium 10.

173. Si ofcillationes non fuerint infinite paruae fuper circulo BAD, tempora ofcillationum maiora erunt, quo maiores fint ofcillationum arcus. Atque fi ofcillationes tamen fint valde paruae, erit tempus talis ofcillationis ad tempus ofcillationis infinite paruae vt quadruplum diametri circuli finu verfo arcus percurfi auctum ad quadruplum diametri ipfum.

Corollarium 11.

174. Altitudo ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g follicitatum defcendit, quo fit defcenfus per arcum EMA infinite paruum eft $= \frac{\pi^2 a}{8}$; feu eft ad octauam radii partem vt quadratum peripheriae circuli ad quadratum dia-

diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $= \frac{5}{4} a$.

Corollarium 12.

175. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, quo per diametrum circuli (102). Quare tempus descensus super chorda infinite parua est ad tempus descensus super arcu respondente vt $\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ ad $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ i. e. vt diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus vnius integrae oscillationis infinite paruae ex itu et reditu compositae vt diameter ad peripheriam.

Scholion 3.

Tabula V. Fig. 4.

176. Si duo arcus circulares AE et FA super quibus coniunctis oscillationes peraguntur non sunt aequales, ope penduli hae oscillationes confici possunt, si in centro K arcus AF clauus infigatur, vt filum CA, postquam arcum EA circa centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat.

PROPOSITIO 19.

Problema.

177. *Data potentia sollicitante inuenire longitudinem penduli infinite paruas oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusue vno minuto secundo absoluat.*

So-

Solutio.

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, vnitate vim gravitatis denotante, est tempus vnius dimidiae oscillationis infinite paruae $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expressio vt in minutis secundis habeatur, longitudo a in partibus millesimis pedis Rhenani est exprimenda, et formula $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 diuidenda, vt ex primo Libro apparet. Quamobrem habebitur tempus vnius dimidiae oscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}}$ minut. sec. Quare, cum hoc tempus vnum minutum secundum esse debeat, erit $\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$, atque $a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}g$. part. mill. pedis Rhen. Haec ergo est longitudo penduli semioscillationes vno minuto secundo absoluentis. Q. E. I.

Corollarium 1.

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes peragentium, sed a diuersis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiarum ratione.

Corollarium 2.

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi grauitatis 1, qui casus in oscillationes in superficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quod itus reditusque singulos vno minuto secundo absoluit $= 3, 16625$ pedum Rhenan. seu trium pedum cum sexta pedis parte.

Scho-

Scholion. I.

180. Apprime conuenit haec longitudo cum ea, quam Hugenius per experimenta invenit; ex quo apparet nos in praecedente libro numerum 15625. ſcrup. ped. Rhen. recte pro altitudine, ex qua corpus vi grauitatis ſollicitatum tempore vnius minuti ſecundi delabitur, aſſumſiſſe; ex hoc enim numero fluit numerus 250, per quem temporum expreſſiones diuidi debent, vt minuta ſecunda praebeant. Cum igitur Hugenius longitudinis 3, 166. ped. tertiam partem pro pede vniuerſali haberi velit, quippe cuius longitudo vbique terrarum per obſeruationes poteſt determinari: continebit hic pes vniuerſalis 1055 partes milleſimas pedis Rhenani.

Scholion 2.

181. Obſeruationibus vero hic pes vniuerſalis ſequenti modo commodiſſime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f, quod ad minimas oſcillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiae oſcillationes tempore vnius horae, earumque numerus ſit n; ita vt vna ſemioſcillatio abſoluatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. ſecund. Sit iam longitudo penduli ſemioſcillationes minutis ſecundis abſoluentis z. Quare cum tempora oſcillationum diuerſorum pendulorum ab eadem potentia ſollicitatorum ſint in ſubduplicata ratione pendulorum (171.); erit $\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$ ideoque

que $z = \frac{n^2 f}{12960000}$ et consequenter pes vniuersalis $= \frac{n^2 f}{38880000}$.

Corollarium 3.

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3165\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhenani semioscillationes duobus minutis secundis absoluet; quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

Corollarium 4.

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen. si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius vna semioscillatio 2536 min. secunda. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absoluet.

Corollarium 3.

185. Quia tempus dimidiae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integrae oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus reuolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circuli vrgetur vi $= g$, vt ex praeced. Libro apparet. Hanc ob rem tempus vnius oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur tempori, quo corpus proiectum in superficie terrae vnam reuolutionem perageret. Ostendit vero quoque Hugenius corpus hoc modo motum tempore 24 horarum fere 17 reuolutiones esse absoluturum.

Co-

Corollarium 6.

186. Cum vis grauitatis sit ad vim qua corpus in superficie solis ad centrum solis vrgetur, vt 1000 ad 41; erit longitudo penduli, quod in superficie solis semioscillationes minuto secundo absoluit $= 77, 226$ ped. Rhenan. Simili modo ob grauitatem in superficie Iouis $= \frac{127}{82}$, tale pendulum longum erit $6, 448$ ped. Atque in superficie Saturni ob grauitatem $= \frac{105}{82}$ talis penduli longitudo erit $4, 054$ ped.

PROPOSITIO 20.

Problema.

187. *Si fuerit curua* BAD, *super qua fiunt oscillationes, cyclois circulo diametri* AC *super basi horizontali* BD *descripta; determinare tempus oscillationis per quemque arcum* EAF, *existente potentia sollicitante uniformi et deorsum tendente.*

Tabula V. Fig. 5.

Solutio.

Sit radius osculi in A nempe $AO = a$, qui est duplum diametri circuli generatoris AC, erit ergo $AC = \frac{1}{2}a$ et posita abscissa $AP = x$, et arcu respondente $AM = s$, erit ex natura cycloidis $s^2 = 2ax$. Sit iam abscissa arcui EAE, qui motu oscillatorio percurritur, respondens $AG = b$, erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb, et celeritas in M debita altitudini $g(b - x)$. Quare cum sit $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$ erit tempus, quo arcus AM per-

percurritur $= \int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}(bx-x^2)} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$. Eſt vero ſi poſt integrationem ponatus $x=b$, quo tempus per totum arcum AE prodeat, $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$, ſeu peripheria circuli per diametrum diuiſa. Quare tempus vnius aſcenſus vel deſcenſus eſt $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, et tempus vnius itus vel reditus per arcum EAF erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Atque tempus vnius integrae oſcillationis erit $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

188. Quia in hanc temporis expreſſionem littera b, quae quantitatem arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oſcillationum tempora, quae ſuper eadem cycloide perficiuntur, ſunt inter ſe aequalia.

Corollarium 2.

189. Tempus ergo vnius cuiusque oſcillationis erit aequale tempori oſcillationis per arculum infinite paruum. At arculus infinite paruus congruit cum arculo circuli radio OA deſcripti. Quare tempus cuiusque oſcillationis ſuper cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oſcillationem minimam abſoluit. Id quod etiam ex praecedente Propoſ. elucet, tempus enim minimae oſcillationis penduli a eſt $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (167.), qua eadem formula tempus vnius oſcillationis integrae ſuper cycloide expreſſum inuenimus.

Co-

Corollarium 3.

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, vt corpus oscillans in cycloide moueatur; omnes eius oscillationes siue fuerint magnae siue paruae aequalibus absoluentur temporibus. Quare si AO fuerit $= 3166\frac{1}{4}g$ scrup. pedis Rhen. singulae semioscillationes minuto secundo absoluentur.

Corollarium 4.

191. Omnes igitur descensus super cycloide ad punctum infimum A sunt aequitemporanci seu isochroni; item omnes ascensus ex puncto infimo A donec celeritas fuerit absumta. Tempus vero vnius ascensus vel descensus est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Scholion 1.

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appellari solet, quia omnes oscillationes super ea eodem tempore absoluuntur. Hugenius primus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit, statimque cogitauit de cycloide in locum circuli substituenda in oscillationibus, id quod in horologiis effecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oscillandi modum rursus deseruerunt, quod eius vsum nimis exiguum comperuerint. Atque certe in vacuo quaelibet curua oscillationes isochronas producit, quia perpetuo eiusdem magnitudinis existunt. In medio resistente vero, quo oscillationes decrescunt, cy-

 clois

sumus inuestigaturi, super quibus corpus a huiusmodi potentiis sollicitatum, data lege incedat.

PROPOSITIO 21.

Problema

196. *Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum* C *trahatur, atque super data curua* AM *moueatur; determinare motum corporis super hac linea, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.*

Tabula V. Fig. 6.

Solutio.

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b, et puncti A a centro C distantia AC $= a$. Celeritas vero corporis in quocunque curuae loco M debita sit altitudini v, et vis, qua corpus in M versus C sollicitatur sit $= P$, existente vi grauitatis corporis moti $= 1$. Dicatur distantia MC, y, et arcus AM, s; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C describantur arcus circulares MP, mp; erit $AP = a - y$, $Pp = Mn = -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT, erit $MC : MT = Mm : Mn$; et $MC : CT = Mm : mn$, vnde erit $MT = \frac{-y dy}{ds}$ et $CT = \frac{y \surd (ds^2 - dy^2)}{ds}$. Ex quibus, si vis centripeta in tangentialem secundum MT et normalem secundum MO resolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{P dy}{ds}$ et normalis $= \frac{P \surd (ds^2 - dy^2)}{ds}$. Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv = -P dy$. Ponatur interuallum AP

 $= x$,

$= x$, quo corpus propius ad centrum accessit, erit $a - y = x$ et $dx = -dy$. Quare erit $dv = Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi. Ita igitur integrali $\int Pdx$ accepto, vt euanescat posito $x = o$, erit $v = b + \int Pdx$. Ex quo tempus per arcum AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b + \int Pdx)}}$. Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$ tota in pressione curuae secundum MO insumitur. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhibeatur, pono perpendiculum CT $= p$, erit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$. Deinde radius osculi MO erit $= \frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga $= \frac{2v\,dp}{ydy} = \frac{2dp(b + \int Pdx)}{ydy}$, cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem curua in M versus MO premetur vi $= \frac{Ppdy - 2bdp - 2dp\int Pdx}{ydy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita vt corpus in aequalibus a centro distantiis aequaliter vrgeatur, celeritas corporis a distantia quoque tantum pendebit, atque corpus super curua AM motum in aequalibus a centro distantiis aequales habebit celeritates.

Corollarium 2.

197. Atque in quouis puncto M celeritas tanta erit, quantam idem corpus acquireret, si eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ ex A per interual-lum

lum AP descenderet, existente nimirum $CP = CM$.

Corollarium 3.

198. Etiamsi igitur ipsa curua AM sit incognita; tamen corporis super ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari. Est nempe pro distantia y, $v = b + \int P dx$, existente $x = a - y$.

Corollarium 4.

199. Si curua AM fuerit talis, vt pressio, quam corpus in eam exercet, sit nulla, erit curua ea ipsa, quam corpus motum in A celeritate $\sqrt{b}$ inchoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero $Pp\,dy = 2b\,dp + 2dp \int P dx$. seu ob $dx = -dy$, habebitur $Pp\,dy + 2\,dp \int P\,dy = 2\,b\,dp$. Cuius integralis est $p^2 \int P\,dy = bp^2 - bb^2$ existente b perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus inuenitur $P = \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$ uti praeced. Libro pro motu libero inuenimus.

Corollarium 5.

200. In motu igitur super quacunque curua AM, pressio, quam curua in M secundum MO sustinet, est $= \frac{-\text{diff. } p^2(b + \int P dx)}{py\,dy} = \frac{\text{diff. } p^2(b + \int P dx)}{p\,dx\,(a-x)} = \frac{\text{diff. } p^2 v}{p\,dx\,(a-x)}$.

Exemplum 1.

201. Sit curua AM circulus centrum in C habens; erit motus corporis vniformis, propter

 ean-

eandem eius perpetuo a centro virium C diftantiam. Quare erit $v = b$ et $\int P dx = o$, atque tempus per $AM = \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}$. Deinde cum fit $y = a$ erit et $p = a$ et $dp = dy$. Quamobrem preffio, quam curua fecundum MO feu verfus centrum C fuftinet, prodibit $= P - \frac{2b}{a}$. Ex quo perfpicitur; fi fuerit $b = \frac{Pa}{2}$ corpus libere per hunc circulum motum iri.

Exemplum 2.

202. Sit vis centripeta P poteftati cuicunque diftantiarum y proportionalis feu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curua AM fpiralis logarithmica circa centrum C, ita vt fit $p = my$, et $dp = m\,dy$, atque $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Erit ergo $v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n}{(n+1)f^n}$ atque tempus per arcum $AM = \frac{\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(1-m^2)}}$ $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n)}}$. Preffio vero, quam curua fecundum MO fuftinet, erit $= \frac{m(n+3)y^n}{(n+1)f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2ma^{n+1}}{(n+1)f^n y}$.

Co-

Corollarium 6.

203. Corpus igitur cum in centrum C peruenerit, celeritatem habebit finitam, si $n+1$ est numerus affirmatiuus, altitudo enim illi celeritati debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}+b$. At si $n+1$ est numerus negatiuus vel etiam $=0$ celeritas corporis in C erit infinite magna.

Corollarium 7.

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione a centro tendente, seu vis centrifuga praeualebit, si fuerit $n>-3$. At si $n<-3$, tunc vis normalis praeualebit, atque curua vi infinita versus centrum premetur.

PROPOSITIO 22.
Problema.

205. *Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium* C *trahatur, dataque sit curua* EAF *ad oscillandum idonea, determinare motum oscillatorium corporis super hac curua.*

Tabula VI. Fig. 1.

Solutio.

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis; erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantiis, vt M et N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla, maxima vero erit in puncto cur-

curuae A centro C proximo, ducaturque recta CAO. Corpus ergo per arcum EAF oscillationes absoluet, ad quas definiendas motum corporis super vtraque curua AE et AF inuestigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A debita altitudini b, et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v. Ponatur distantia CM, cui aequalis sit CP, $= y$, et vis centripeta in M $=$ P. Sit CA $= a$ et AP $= x$, atque AG $= k$, sumta CG $=$ CE, erit $y = a + x$ et CG $=$ CE $= a + k$. Posito arcu AM $= s$, erit tangens MC, quam perpendiculum ex C in eam demissum determinat $= \frac{y\,dy}{ds}$, ideoque vis tangentialis $= \frac{P\,dy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria: vnde habebitur $dv = -Pdy = -Pdx$ et $v = b - \int Pdx$; integrali $\int Pdx$ ita accepto, vt euanescat posito $x = 0$. Si igitur ponatur $v = 0$, dabit ex aequatione $b = \int Pdx$ valor ipsius x erutus interuallum AG seu k. Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx)}}$, ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem ita institutam, vt integrale euanescat posito $x = k$, seu $\int Pdx = b$. Simili modo tempus per arcum AF inuenietur, quo igitur inuento summa horum temporum dabit tempus vnius semioscillationis. Q. E. I.

Corollarium 1.

206. Si curua AF similis et aequalis fuerit curuae AE tempora per vtramque erunt aequalia,

lia, atque ideo tempus vnius semioscillationis aequabitur duplo tempori per AE.

Exemplum 1.

207. Si arcus EAF fuerit infinite paruus, potentia sollicitans P ob distantiam a centro E inuariabilem, erit constans $= g$. Sit radius osculi curuae in A seu AO $= b$, erit AE arcus circuli hoc radio descriptus. At ex natura circuli erit CT $= \frac{a^2 + 2ab - y^2}{2b}$ et MT $= \frac{\sqrt{(4b^2y^2 - a^4 - 4a^3b - 4a^2b^2 + 2a^2y^2 + 4aby^2 - y^4)}}{2b}$. Sed ob $y = a + x$ et x respectu a et b infinite paruum erit MT $= \frac{\sqrt{2abx(a+b)}}{b}$ et $ds = \frac{bydy}{\sqrt{2abx(a+b)}} = \frac{b(a+x)dx}{\sqrt{2agx(a+k)}} = \frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a+b)x}}$. At cum sit $v = b - gx$, ideoque $b = gk$; habebimus $v = g(k - x)$ atque elementum temporis $= \frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)(kx - x^2)}}$. At $\int \frac{dx}{\sqrt{(kx - x^2)}}$ posito $x = k$ fit $= \pi$ peripheriae circuli existente diametro 1. Consequenter tempus per arcum AE infinite paruum est $= \frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)}} = \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$.

Corollarium 2.

208. Si centrum virium infinite distet, vt esset $a = \infty$ erit potentiae directio sibi parallela, ideoque vt supra erit tempus, quo arcus AE absoluitur $= \frac{\pi\sqrt{2b}}{2\sqrt{g}}$. At si arcus circuli EA fit linea recta, seu $b = \infty$, erit tempus per EA $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque sed directiones sibi parallelas habente sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ab}{a+b}$. Tempus enim vnius descensus seu ascensus huius penduli est $= \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$ (166.).

Exemplum 2.

Tabula VI. Fig. 4.

210. Sit iam vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$, et linea EF recta. Erit $AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)}$ et $x = y - a$. Erit autem porro $x = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$; positoque $v = o$ fiet $y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1) bf^n = (a+k)^{n+1}$. Vel dicta CE $= c$ erit $b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1) f^n}$, et $v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$ Consequenter ob $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per $AM = \int \frac{ydy\sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale ita est accipiendum, vt fiat $= o$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

Co-

Corollarium 4.

211. Ponatur vis centripeta diſtantiis proportionalis ſeu $n = 1$ erit tempus per AM $= \int \frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$ ſeu poſito AE $= i$ ob $e^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus per AM $= \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}}$, vnde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oſcillationes ſuper hac recta abſoluuntur eodem tempore, dimidia nimirum oſcillatio tempore $\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

Corollarium 5.

212 Si oſcillatio eſt infinite parua, tempus vnius ſemioſcillationis ſuper recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$, at cum vis centripeta tum vt conſtans conſiderari poſſit, ſit ea $= g$; erit $\frac{a}{f} = g$, ideoque tempus vnius ſemioſcillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ vt ſupra §. 208.

Corollarium 6.

213. Quia directiones grauitatis reuera convergunt ad centrum terrae, corpus in ſuperficie telluris ſuper recta perfecte horizontali oſcillationes peragere poſſet, niſi reſiſtentia et frictiones impedirent. Tempus autem vnius ſemioſcillationis talis foret (ob $a =$ ſemid. terrae et $g = 1$) 2537. minut. ſecund. (183.)

 PRO-

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

214. *Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio sit verticalis* MQ, *alterius horizontalis* MP: *definire motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curua* AMB.

Solutio.

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis sollicitans secundum MQ sit $= P$, et ea secundum $MP = Q$. Ponatur $BR = t$, $RM = z$, arcus $BM = w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oscillationes referetur, sit $AP = x = QM$; $PM = AQ = y$ et arcus $AM = s$, celeritas vero corporis in A debita sit altitudini b; erit ergo $t + x =$ const. item $z + y =$ const. et $w + z =$ const. vnde $dt + dx = o$ et $dw + dz = o$. Resolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales, erit vis tangentialis ex P orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $= \frac{Pdz}{dw}$ trahens secundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex $Q = \frac{Qdt}{dw}$ quae illi normali est contraria. Vtraque vis tangentialis motum per BM accelerat, ideoque erit $dv = Pdt + Qdz$, et $v = \int Pdt + \int Qdz$ his integralibus ita ac-

acceptis, vt euanefcant factis t et $z = o$. Atque pro afcenfu ex A erit $v = b - \int Pdx - \int Qdy$, his integralibus ita fumtis, vt euanefcant pofitis x et $y = o$. Pofitis igitur in illa aequatione $v = \int Pdt + \int Qdz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit $= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int Pdt + \int Qdz)}}$ et tempus per AM $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx - \int Qdy)}}$. Sumto elemento dt vel dx conftante erit radius ofculi curuae in M $= \frac{dw^3}{dt\, ddz}$, atque vis centrifuga cuius directio fecundum MN eft $= \frac{2dt\, ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Totalis ergo vis, qua curua in M fecundum MN premitur eft $= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2dt\, ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Q. E. I.

Corollarium I.

215. Si P eft functio ipfius x vel t, quaecunque, et Q functio ipfius y vel z quaecunque; tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi, et ope aequationis pro curua tempus quoque.

Corollarium 2.

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae follicitantes, fi modo earum directiones fint in eo plano, in quo eft curua AMB, in huiusmodi duas potentias poffunt refolui, haec propofitio latiffime patet et omnes cafus complectitur, quibus potentiarum directiones et curua funt in eodem plano.

 Scho-

Scholion.

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiiciantur, et comprehendit casus, quibus non omnes potentiarum directiones sunt in plano curuae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resoluendae, quarum alterae sint in ipso curuae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur, in plano curuae sitae eodem modo, quo in propositione vsi sumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum MN: alterae potentiae, quia normales sunt in curuam, in curua premenda tantum insumentur. Quare hinc duplex nascetur pressio, quam curua sustinet, altera secundum MN directa, altera ad planum curuae normalis. Harum igitur duarum pressionum, si media sumatur directio prodibit directio potentiae aequiualentis, in qua curua premitur. Quamobrem non est opus, vt huiusmodi casus euoluamus, sed paucis attingemus motum corporum super curua, quae ipsa non est in plano sita, vbi potentiam sollicitantem constantem et deorsum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24.

Problema.

Tabula VI. Fig. 4.

218. *Existente potentia sollicitante uniformi, eiusque directione recta deorsum tendente, determinare motum corporis super curua quacunque* A M *non in eodem plano constituta.*

So-

Solutio.

Sit curua AQ proiectio curuae AM in plano horizontali, demissisque ex punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendiculis MQ et mq, ducantur ad axem pro lubitu assumtum AP normales QP et qp; ponanturque $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b, celeritas in M debita altitudini v. Potentia vero sit $= g$, qua corpus in M secundum MQ sollicitatur. Ducta tangente MT, et in eam ex Q perpendiculari QT, resoluatur potentia g in tangentialem et normalem. Erit ob $MQ : MT = \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} : dz$ vis tangentialis $\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque ob $MQ : QT = \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} : \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ vis normalis $= \frac{g\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ Quia autem vis tangentialis motum retardat erit $dv = -g\,dz$ et $v = b - gz$, vnde tempus, quo arcus AM absoluetur, prodit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{(b-gz)}}$. Vis normalis vero efficiet, vt curua in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad Mm normalem et in plano $QMmq$ sitam. Premitur vero curua praeterea a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi oppositam vi $= \frac{2(b-gz)}{r}$, designante r radium osculi curuae in M. Inuenimus autem supra §. 71. positionem radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui §. 72. est inuentus; est nempe $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dyddz-dzddy)^2)}}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

Corollarium 2.

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b-gz=o$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit, iterumque descendet.

Corollarium 3.

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P; tum inuentam fuisse celeritatem in M debitam altitudini $b - \int Pdz$.

Scholion 1.

Tabula VI. Fig. 5.

222. Si in plano verticali concipiatur curua AM ad axem horizontalem AQ relata; fueritque AQ = curuae AQ praec. Fig. et QM = QM praec. Fig. erit quoque curua AM aequalis curuae AM praec. Fig. Si iam corpus super curua AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b, et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b-gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. Fig. Hac igitur ratione motus corporis super curua non in eodem plano sita reduci potest ad motum super

curua

curua in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curuae sufferunt, erunt diuersae. Quamobrem hoc modo pressio vt libet poterit variari manente motu corporis super curua eodem.

Scholion 2.

223. Posuimus hactenus curuam, super qua corpus mouetur, et potentiam sollicitantem vna cum directione datas, ex iisque motum corporis et pressionem curuae deduximus. Nunc igitur cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur, reliquaque sunt inuenienda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curuae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curua et motus super ea debeat inueniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur; inuenire curuam* A M, *quam corpus super ea descendens vbique aequaliter premit.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et curua $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$; et altitudo debita celeritati in $A = b$;

 erit

erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita sumto, vt euanescat facto $x = o$. His positis erit pressio, quam curua secundum normalem MN sustinet (83) $= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx) dx\, ddy}{ds^2}$, sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$, erit $k ds^2 = P ds^2 dy + 2b dx ddy + 2 dx ddy \int P dx$. At si ponatur ds constans, habebitur $k ds dx = P dx dy + 2b ddy + 2 ddy \int P dx$, cuius integralis est $\frac{2 dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quae aequatio cum P per x detur, construi potest; quia y in eam non ingreditur sed tantum dy. Q. E. I.

Corollarium 1.

225. Exprimit $\int \frac{dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM mouetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b + \int P dx}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP diuisa, dat $\frac{k ds}{2 dy}$, ex qua proprietate curua AM determinatur.

Corollarium 2.

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque puta $\sqrt{c}$ potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curua in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli $= \frac{k \sqrt{c}}{2 \sqrt{b}}$ posito sinu toto $= 1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam $\frac{2 \sqrt{b}}{k}$; ideoque

que si motus in A a quiete incipit c debet esse $= o$.

Exemplum.

227. Sit potentia vniformis seu $P = g$, erit $\int \frac{kdx}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{2k\sqrt{(b+gx)} - 2k\sqrt{b} + 2k\sqrt{c}}{g} = \frac{2dy\sqrt{(b+gx)}}{ds}$, vnde habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{g\sqrt{(b+gx)}}$ atque $gdy\sqrt{(b+gx)} = kds\sqrt{(b+gx)} + kds(\sqrt{c}-\sqrt{b})$. Ex qua orietur sequens aequatio $dy = \frac{kdx(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})^2)}}$. Sit $\sqrt{(b+gx)} = t$ et $-\sqrt{c}+\sqrt{b} = b$, erit $x = \frac{t^2-b}{g}$ et $dx = \frac{2tdt}{g}$. His igitur substitutis habebitur $dy = \frac{2ktdt(t-b)}{g\sqrt{(g^2t^2-k^2t^2+2k^2bt-k^2b^2)}}$. Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si $k = o$, tum enim inuenitur curua, quam corpus in A proiectum libere describit. Alter est casus, quando $b = o$, seu $\sqrt{b} = \sqrt{c}$, tum enim habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$, seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k = g$, seu si tota pressio aequatur vbique vi sollicitanti corpus g; erit $dy = \frac{2ttdt - 2btdt}{g\sqrt{(2bt-b^2)}}$, cuius integralis est $gy = \frac{(2tt-2bt-2b^2)}{5b}\sqrt{(2bt-b^2)} + \text{const.}$ Constans haec, quia posito $x = o$ seu $t = \sqrt{b}$, fit $y = o$, debet esse $= \frac{(2b^2+2b\sqrt{b}-2b)}{5b}\sqrt{(2b\sqrt{b}-b^2)}$. Restituto ergo $\sqrt{(b+gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b}-\sqrt{c} = b = \sqrt{a}$ habebitur $\frac{5gy\sqrt{a}}{2} = (b+gx-a\cdot\sqrt{a(b+gx)})\sqrt{(2\sqrt{a(b+gx)}-a)} + (a-b+\sqrt{ab})\sqrt{(2\sqrt{ab}-a)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, in qua a debet esse numerus

minor quam b. Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c=o$, vt angulus ad A sit realis, et propterea habetur $y=\frac{kx}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$.

Corollarium 3.

228. Aequatio algebraica inuenta, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a=b$, quo casu curuae tangens in A est verticalis; prodibit $\frac{5\, gy\sqrt{a}}{2}=(gx-\sqrt{(a^2+gax)})$ $\sqrt{(2\sqrt{(a^2+gax)}-a)}+a\sqrt{a}$.

Corollarium 4.

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c}=o$, atque ideo prodibit ista aequatio $dy=\frac{kdx(\sqrt{(b+gx)}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)-k^2(\sqrt{(b+gx)}-\sqrt{b})^2)}}$. Si tangens in A ponatur horizontalis erit $k\sqrt{c}=g\sqrt{b}$ habebiturque haec aequatio $dy=\frac{dx(k\sqrt{(b+gx)}+(g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)x-(k\sqrt{(b+gx)}+(g-k)\sqrt{b})^2)}}$

Scholion.

230. Vocatur haec curua linea aequabilis pressionis, eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris. quae cum hac nostra egregie conuenit. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed vtcunque variabilis P, aequationem inuentam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curuam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k=mP$ atque pro curua quaesita prodibit

dibit sequens aequatio $\frac{2dy\sqrt{(b+\int Pdx)}}{ds} = \int \frac{mPdx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, cuius integralis est $dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}$. Haec aequatio, si fuerit $c=o$ erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curua in A cum verticali constituit, eius enim sinus est $m + \frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare si sumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$ curua tanget in A verticalem. Praeterea haec curua hanc habet proprietatem, vt tempus, quo arcus AM percurritur proportionale sit $m.\mathrm{AM}-\mathrm{PM}$. Denique ex solutione huius propositionis fluit solutio sequentis, in qua ex data curua et pressione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26.
Problema.

231. *Data curua* AM *et celeritate initiali in* A *debita altitudini* b, *inuenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, vt corpus super curua* AM *descendens curuam vbique aequaliter premat.*

Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit potentia sollicitans quaesita $=P$, dictisque $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, atque pressione, quam curua sustinet $= k$; habebitur ista aequatio $kds\,dx = Pdx\,dy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$ (224) in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem

 per

per dy multiplicata et integrata dat $kds\int dx\,dy = dy^2 \int Pdx + bdy^2$, ex qua prodit $\int Pdx + b = \frac{kds}{dy}\int dx\,dy$; quae differentiata dat $P = \frac{kds}{dy} - \frac{2\,kds\,ddy}{dx\,dy^2}\int dx\,dy$. At integrale $\int dx\,dy$ ita est sumendum, vt posito $x = o$ fiat $\frac{kds}{dy^2}\int dx\,dy = b$. Quo autem haec integratio facilius succedat, ponatur $dy = pdx$ erit $ds = dx\surd(1+p^2)$, et $\int dx\,dy = ds\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}$, ideoque $\frac{kds}{dy^2}\int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}$. Ex qua aequatione prodibit $P = \frac{k\surd(1+pp)}{p} - \frac{2kdp}{p^3 dx}\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

232. Ex hac aeqnatione quoque statim celeritas corporis in singulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M est $b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^2}\int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}$. Tempus vero, quo arcus AM absoluitur, est $= \frac{1}{\surd k}\int pdx : \surd\int\frac{pdx}{\surd(1+p^2)}$.

Corollarium 2.

233. Perspicuum est ex aequatione inuenta, quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior sit k, ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus est in pressionem k.

Corollarium 3.

234. Etsi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expressione b non

b non ineſt, tamen pendet P ab b ob integrale $\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, quod ita eſt accipiendum, vt poſito $x=o$, fiat $\frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=b$. Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia ſollicitans, tametſi curua propoſita eadem maneat.

Exemplum I.

235. Sit curua AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens; ita vt ſit $ay=x^2$. Erit ergo $dy=\frac{2xdx}{a}$, hincque $p=\frac{2x}{a}$, et $\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int\frac{2xdx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4x^2)}+C$. Quare erit $\frac{k(2+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2}+\frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}$. Quae quantitas cum debeat eſſe $=b$, ſi ſit $x=o$, erit $C=-\frac{a}{2}$, ſeu $\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{\sqrt{(a^2+4x^2)}-a}{2}$. Ex quibus inuenietur $P=\frac{ka^3}{4x^3}-\frac{k(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2+4x^2)}}{4x^3}$. In ipſo ergo puncto A potentia P erit infinite parua, tam numerator enim, quam denominator euaneſcunt, ſitque valor iſtius expreſſionis $=o$. Celeritas vero in A non poteſt eſſe arbitraria, etiam ſi conſtans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expreſſionem $b+\int Pdx=\frac{kds}{dy^2}\int dxdy$ reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor inuenietur, ſi in expreſſione $\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}-ka(a^2+4x^2)}{8x^2}$, ponatur $x=o$. Tum autem prodibit $b=\frac{ka}{4}$. Hac ergo celeritate deſcenſus

Corollarium 3.

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque sed directiones sibi parallelas habente sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ab}{a+b}$. Tempus enim vnius descensus seu ascensus huius penduli est $= \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$ (166.).

Exemplum 2.

Tabula VI. Fig. 4.

210. Sit iam vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$, et linea EF recta. Erit $AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)}$ et $x = y - a$. Erit autem porro $x = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$; positoque $v = o$ fiet $y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1) bf^n = (a+b)^{n+1}$. Vel dicta $CE = c$ erit $b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1) f^n}$, et $v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$. Consequenter ob $ds = \frac{y dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per $AM = \int \frac{y dy \sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale ita est accipiendum, vt fiat $= o$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

Co-

Corollarium 4.

211. Ponatur vis centripeta diſtantiis proportionalis ſeu $n = 1$ erit tempus per AM $= \int \frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$ ſeu poſito AE $= i$ ob $e^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus per AM $= \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}}$, vnde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oſcillationes ſuper hac recta abſoluuntur eodem tempore, dimidia nimirum oſcillatio tempore $\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

Corollarium 5.

212 Si oſcillatio eſt infinite parua, tempus vnius ſemioſcillationis ſuper recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$, at cum vis centripeta tum vt conſtans conſiderari poſſit, ſit ea $= g$; erit $\frac{a}{f} = g$, ideoque tempus vnius ſemioſcillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ vt ſupra §. 208.

Corollarium 6.

213. Quia directiones grauitatis reuera conuergunt ad centrum terrae, corpus in ſuperficie telluris ſuper recta perfecte horizontali oſcillationes peragere poſſet, niſi reſiſtentia et frictiones impedirent. Tempus autem vnius ſemioſcillationis talis foret (ob $a =$ ſemid. terrae et $g = 1$) 2537. minut. ſecund. (183.)

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

214. *Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio sit verticalis* MQ, *alterius horizontalis* MP: *definire motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curua* AMB.

Solutio.

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis sollicitans secundum MQ sit $= P$, et ea secundum $MP = Q$. Ponatur $BR = t$, R $M = z$, arcus $BM = w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oscillationes referetur, sit AP $= x = QM$; $PM = AQ = y$ et arcus $AM = s$, celeritas vero corporis in A debita sit altitudini b; erit ergo $t + x =$ const. item $z + y =$ const. et $w + z =$ const. vnde $dt + dx = o$ et $dw + dz = o$. Resolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales, erit vis tangentialis ex P orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $= \frac{Pdz}{dw}$ trahens secundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex $Q = \frac{Qdt}{dw}$ quae illi normali est contraria. Vtraque vis tangentialis motum per BM accelerat, ideoque erit $dv = Pdt + Qdz$, et $v = \int Pdt + \int Qdz$ his integralibus ita ac-

acceptis, vt euanefcant factis t et $z = o$. Atque pro afcenfu ex A erit $v = b - \int Pdx - \int Qdy$, his integralibus ita fumtis, vt euanefcant pofitis x et $y = o$. Pofitis igitur in illa aequatione $v = \int Pdt + \int Qdz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit $= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int Pdt + \int Qdz)}}$ et tempus per AM $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx - \int Qdy)}}$. Sumto elemento dt vel dx conftante erit radius ofculi curuae in M $= \frac{dw^3}{dt\, ddz}$, atque vis centrifuga cuius directio fecundum MN eft $= \frac{2\,dt\,ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Totalis ergo vis, qua curua in M fecundum MN premitur eft $= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2\,dt\,ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Q.E.I.

Corollarium I.

215. Si P eft functio ipfius x vel t, quaecunque, et Q functio ipfius y vel z quaecunque; tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi, et ope aequationis pro curua tempus quoque.

Corollarium 2.

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae follicitantes, fi modo earum directiones fint in eo plano, in quo eft curua AMB, in huiusmodi duas potentias poffunt refolui, haec propofitio latiffime patet et omnes cafus complectitur, quibus potentiarum directiones et curua funt in eodem plano.

 Scho-

Scholion.

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiiciantur, et comprehendit casus, quibus non omnes potentiarum directiones sunt in plano curuae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resoluendae, quarum alterae sint in ipso curuae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur in plano curuae sitae eodem modo, quo in propositione vsi sumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum MN: alterae potentiae, quia normales sunt in curuam, in curua premenda tantum insumentur. Quare hinc duplex nascetur pressio, quam curua sustinet, altera secundum MN directa, altera ad planum curuae normalis. Harum igitur duarum pressionum, si media sumatur directio prodibit directio potentiae aequiualentis, in qua curua premitur. Quamobrem non est opus, vt huiusmodi casus euoluamus, sed paucis attingemus motum corporum super curua, quae ipsa non est in plano sita, vbi potentiam sollicitantem constantem et deorsum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24.

Problema.

Tabula VI. Fig. 4.

218. *Existente potentia sollicitante vniformi, eiusque directione recta deorsum tendente, determinare motum corporis super curua quacunque* A M *non in eodem plano constituta.*

So-

Solutio.

Sit curua AQ proiectio curuae AM in plano horizontali, demissisque ex punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendiculis MQ et mq, ducantur ad axem pro lubitu assumtum AP normales QP et qp; ponanturque $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b, celeritas in M debita altitudini v. Potentia vero sit $= g$, qua corpus in M secundum MQ sollicitatur. Ducta tangente MT, et in eam ex Q perpendiculari QT, resoluatur potentia g in tangentialem et normalem. Erit ob MQ: MT $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : dz$ vis tangentialis $\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque ob MQ: QT $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ vis normalis $= \frac{g\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ Quia autem vis tangentialis motum retardat erit $dv = -g\,dz$ et $v = b - gz$, vnde tempus, quo arcus AM absoluetur, prodit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{(b-gz)}}$. Vis normalis vero efficiet, vt curua in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad Mm normalem et in plano QMmq sitam. Premitur vero curua praeterea a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi oppositam vi $= \frac{2(b-gz)}{r}$, designante r radium osculi curuae in M. Inuenimus autem supra §. 71. positionem radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui §. 72. est inuentus; est nempe $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dy\,ddz - dz\,ddy)^2)}}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

Corollarium 2.

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b-gz=o$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit, iterumque descendet.

Corollarium 3.

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P; tum inuentam fuisse celeritatem in M debitam altitudini $b-\int Pdz$.

Scholion 1.

Tabula VI. Fig. 5.

222. Si in plano verticali concipiatur curua AM ad axem horizontalem AQ relata; fueritque AQ = curuae AQ praec. Fig. et QM = QM praec. Fig. erit quoque curua AM aequalis curuae AM praec. Fig. Si iam corpus super curua AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b, et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b-gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. Fig. Hac igitur ratione motus corporis super curua non in eodem plano sita reduci potest ad motum super

curua

curua in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curuae sufferunt, erunt diuersae. Quamobrem hoc modo pressio vt libet poterit variari manente motu corporis super curua eodem.

Scholion 2.

223. Posuimus hactenus curuam, super qua corpus mouetur, et potentiam sollicitantem vna cum directione datas, ex iisque motum corporis et pressionem curuae deduximus. Nunc igitur cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur, reliquaque sunt inuenienda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curuae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curua et motus super ea debeat inueniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur; inuenire curuam* AM, *quam corpus super ea descendens vbique aequaliter premit.*

Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et curua $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$; et altitudo debita celeritati in $A = b$;

 erit

erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita sumto, vt euanescat facto $x = o$. His positis erit pressio, quam curua secundum normalem MN sustinet (83) $= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx)\, dx\, ddy}{ds^3}$, sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$, erit $kds^3 = Pds^2 dy + 2bdxddy + 2dxddy \int P dx$. At si ponatur ds constans, habebitur $kdsdx = Pdxdy + 2b\, ddy + 2ddy \int P dx$, cuius integralis est $\frac{2dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{kdx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quae aequatio cum P per x detur, construi potest; quia y in eam non ingreditur sed tantum dy. Q. E. I.

Corollarium 1.

225. Exprimit $\int \frac{dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM mouetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b + \int P dx}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP diuisa, dat $\frac{kds}{2dy}$, ex qua proprietate curua AM determinatur.

Corollarium 2.

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque puta $\sqrt{c}$ potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curua in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli $= \frac{k\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}$ posito sinu toto $= 1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam $\frac{2\sqrt{b}}{k}$; ideoque

que si motus in A a quiete incipit c debet esse $= o$.

Exemplum.

227. Sit potentia vniformis seu $P = g$, erit $\int \frac{kdx}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{2k\sqrt{(b+gx)} - 2k\sqrt{b} + 2k\sqrt{c}}{g} = \frac{2dy\sqrt{(b+gx)}}{ds}$, vnde habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{g\sqrt{(b+gx)}}$ atque $gdy\sqrt{(b+gx)} = kds\sqrt{(b+gx)} + kds(\sqrt{c}-\sqrt{b})$. Ex qua orietur sequens aequatio $dy = \frac{kdx(\sqrt{(b+gx)} + \sqrt{c} - \sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)} + \sqrt{c} - \sqrt{b})^2)}}$. Sit $\sqrt{(b+gx)} = t$ et $-\sqrt{c} + \sqrt{b} = b$, erit $x = \frac{t^2 - b}{g}$ et $dx = \frac{2tdt}{g}$. His igitur substitutio habebitur $dy = \frac{2ktdt(t-b}{g\sqrt{(g^2t^2 - k^2t^2 + 2k^2bt - k^2b^2)}}$. Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si $k = o$, tum enim inuenitur curua, quam corpus in A proiectum libere describit. Alter est casus, quando $b = o$, seu $\sqrt{b} = \sqrt{c}$, tum enim habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$, seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k = g$, seu si tota pressio aequatur vbique vi sollicitanti corpus g; erit $dy = \frac{2ttdt - 2btdt}{g\sqrt{(2bt - b^2)}}$, cuius integralis est $gy = \frac{(2tt - 2bt - 2b^2)}{5b}\sqrt{(2bt - b^2)} +$ const. Constans haec, quia posito $x = o$ seu $t = \sqrt{b}$, fit $y = o$, debet esse $= \frac{(2b^2 + 2b\sqrt{b} - 2b)}{5b}\sqrt{(2b\sqrt{b} - b^2)}$. Restituto ergo $\sqrt{(b+gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b} - \sqrt{c} = b = \sqrt{a}$ habebitur $\frac{5gy\sqrt{a}}{2} = (b + gx - a \cdot \sqrt{a(b+gx)})\sqrt{(2\sqrt{a}(b+gx) - a)} + (a - b + \sqrt{ab})\sqrt{(2\sqrt{ab} - a)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, in qua a debet esse numerus mi-

minor quam b. Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c = 0$, vt angulus ad A sit realis, et propterea habetur $y = \frac{kx}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}$.

Corollarium 3.

228. Aequatio algebraica inuenta, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a = b$, quo casu curuae tangens in A est verticalis; prodibit $\frac{5 gy\sqrt{a}}{2} = (gx - \sqrt{(a^2 + gax)}) \sqrt{(2\sqrt{(a^2 + gax)} - a)} + a\sqrt{a}$.

Corollarium 4.

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c} = 0$, atque ideo prodibit ista aequatio $dy = \frac{kdx(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})^2)}}$. Si tangens in A ponatur horizontalis erit $k\sqrt{c} = g\sqrt{b}$ habebiturque haec aequatio $dy = \frac{dx(k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)x(k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})^2)}}$

Scholion.

230. Vocatur haec curua linea aequabilis pressionis, eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris. quae cum hac nostra egregie conuenit. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed vtcunque variabilis P, aequationem inuentam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curuam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k = mP$ atque pro curua quaesita prodibit

dibit ſequens aequatio $\frac{2dy\sqrt{(b+\int Pdx)}}{ds} = \int \frac{mPdx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, cuius integralis eſt $dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}$. Haec aequatio, ſi fuerit $c=0$ erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curua in A cum verticali conſtituit, eius enim ſinus eſt $m + \frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare ſi ſumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$ curua tanget in A verticalem. Praeterea haec curua hanc habet proprietatem, vt tempus, quo arcus AM percurritur proportionale ſit $m.AM - PM$. Denique ex ſolutione huius propoſitionis fluit ſolutio ſequentis, in qua ex data curua et preſſione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorſum tendentis.

PROPOSITIO 26.
Problema.

231. *Data curua* AM *et celeritate initiali in* A *debita altitudini* b, *inuenire quantitatem potentiae perpetuo deorſum tendentis, quae faciat, vt corpus ſuper curua* AM *deſcendens curuam vbique aequaliter premat.*

Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit potentia ſollicitans quaeſita $=P$, dictisque $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, atque preſſione, quam curua ſuſtinet $= k$; habebitur iſta aequatio $kds\,dx = Pdx\,dy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$ (224) in qua ds eſt elementum conſtans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem

 per

per dy multiplicata et integrata dat $kds \int dx\, dy = dy^2 \int P dx + b dy^2$, ex qua prodit $\int P dx + b = \frac{kds}{dy^2} \int dx\, dy$; quae differentiata dat $P = \frac{kds}{dy} - \frac{2\, kds\, ddy}{dx\, dy^3} \int dx\, dy$. At integrale $\int dx\, dy$ ita eſt ſumendum, vt poſito $x = o$ fiat $\frac{kds}{dy^2} \int dx\, dy = b$. Quo autem haec integratio facilius ſuccedat, ponatur $dy = pdx$ erit $ds = dx \sqrt{(1+p^2)}$, et $\int dx\, dy = ds \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ideoque $\frac{kds}{dy^2} \int dx\, dy = \frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex qua aequatione prodibit $P = \frac{k\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{2kdp}{p^3 dx} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

232. Ex hac aeqnatione quoque ſtatim celeritas corporis in ſingulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M eſt $b + \int P dx = \frac{kds}{dy^2} \int dx\, dy = \frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Tempus vero, quo arcus AM abſoluitur, eſt $= \frac{1}{\sqrt{k}} \int p dx : \sqrt{\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+p^2)}}}$.

Corollarium 2.

233. Perſpicuum eſt ex aequatione inuenta, quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior ſit k, ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus eſt in preſſionem k.

Corollarium 3.

234. Etſi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expreſſione b non

b non ineſt, tamen pendet P ab b ob integrale $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, quod ita eſt accipiendum, vt poſito $x = o$, fiat $\frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = b$. Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia ſollicitans, tametſi curua propoſita eadem maneat.

Exemplum I.

235. Sit curua AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens; ita vt ſit $ay = x^2$. Erit ergo $dy = \frac{2xdx}{a}$, hincque $p = \frac{2x}{a}$, et $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{2xdx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2+4x^2)} + C$. Quare erit $\frac{k(2+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2} + \frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}$. Quae quantitas cum debeat eſſe $= b$, ſi ſit $x = o$, erit $C = \frac{-a}{2}$, ſeu $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(a^2+4x^2)}-a}{2}$. Ex quibus inuenietur $P = \frac{ka^3}{4x^3} - \frac{k(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2+4x^2)}}{4x^3}$. In ipſo ergo puncto A potentia P erit infinite parua, tam numerator enim, quam denominator euaneſcunt, fitque valor iſtius expreſſionis $= o$. Celeritas vero in A non poteſt eſſe arbitraria, etiam ſi conſtans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expreſſionem $b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^2} \int dx\, dy$ reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor inuenietur, ſi in expreſſione $\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}} - ka(a^2+4x^2)}{8x^2}$, ponatur $x = o$. Tum autem prodibit $b = \frac{ka}{4}$. Hac ergo celeritate deſcen-

ſus

ſus incipere debet, vt preſſio vbique aequalis a potentia P inuenta oriatur.

Exemplum 2.

236. Sit curua AM circulus radii a tangens rectam AP in A, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ et $p = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ atque $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Fiet ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1 + pp)}} = \int \frac{xdx}{a} = \frac{x^2}{2a}$, ad quod conſtantem addere non licet, quia $\frac{1 + pp}{pp} = \frac{a^2}{x^2}$ fit infinitum euaneſcente x. Erit ergo $k \frac{(1 + pp)}{pp} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1 + pp)}} = \frac{ka}{2} = b + \int pdx$, quare celeritas corporis erit vniformis, ideoque potentia ſollicitans euaneſcit. Perſpicuum enim eſt corpus a nulla potentia ſollicitatum in peripheria circuli aequabiliter progredi, eiusque vim centrifugam eſſe vbique eiusdem magnitudinis.

Exemplum 3.

237. Sit curua AM cyclois baſin habens horizontalem et cuſpide tangens verticalem AP in A; ita vt ſit $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$. Habetur ergo $p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$ et $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$. Quare erit $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1 + pp)}} = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$ et $\frac{k(1 + pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}$. Sumta ergo conſtante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$, quare fiat $C = 0$, erit $b + \int Pdx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$, et $b = 0$, Prodibit igitur $P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}$. Si itaque corpus ſuper cycloide AM ex A deſcendat ex quiete et ſollicitetur

citetur deorſum a potentia, quae reciproce eſt vt radix quadrata ex abſciſſa AP, corpus vbique curuam aequali vi premet.

Scholion.

238. Dantur igitur caſus, quibus celeritatem Vb non pro lubitu aſſumere licet, quemadmodum in his exemplis euenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite magnum facto $x=o$, conſtans in integratione ipſius $\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$ addenda plerumque hoc ipſo determinatur, quod celeritas initialis non debeat eſſe infinite magna. Semper autem, ſi curua in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum poſito $x=o$, id quod in cauſa etiam eſt, quod in exemplis allatis celeritas initialis non ſit arbitraria.

PROPOSITIO 27.

Problema.

239. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorſum trahatur; inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus ita mouetur, vt tota preſſio, quam curua ſuſtinet, datam habeat rationem ad preſſionem a vi normali ortam.*

Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Deſcendat corpus ex A celeritate debita altitudini b, et poſito AP $=x$, PM$=y$, AM$=s$,

 ſit

sit potentia corpus in M sollicitans $=P$, erit altitudo debita celeritati, quam corpus in M habet, $=b+\int Pdx$. Tota vero pressio quam curua in M secundum directionem normalis MN, sustinet $=\frac{Pdy}{ds}+\frac{2ddy(b+\int Pdx)}{dxds}$ sumto ds pro elemento constante. Iam habeat se haec pressio ad vim normalem $\frac{Pdy}{ds}$ vt m ad 1; erit $(m-1)Pdxdy = 2ddy(b+\int Pdx)$; quae est aequatio pro curua quaesita. Haec vero reducetur ponendo v loco $b+\int Pdx$, ad hanc formam $\frac{(m-1)dv}{v}=\frac{2ddy}{dy}$, quae integrata dat $2\,l\frac{dy}{ds}=(m-1)\,l\frac{v}{a}$, seu $v^{\frac{m-1}{2}}ds = a^{\frac{m-1}{2}}dy$. Ex qua habebitur $dy=\frac{v^{\frac{m-1}{2}}dx}{\sqrt{(a^{m-1}-v^{m-1})}}$ $=\frac{dx(b+\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1}-(b+\int Pdx)^{m-1})}}$, quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Celeritas corporis ibi est nulla, vbi $\frac{dy}{ds}=0$, seu vbi curuae tangens est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positiuus, seu si m maior fuerit vnitate. In his igitur casibus curuam in A tangere ponemus rectam AP, et celeritatem initialem seu $b=0$.

Co-

Corollarium 2.

241. Quare si $m > 1$, seu si pressio tota maior est, quam pressio a vi normali orta; curuam quaesitam dabit ista aequatio $dy = \frac{dx\,(\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (\int Pdx)^{m-1})}}$ in qua $\int Pdx$ ita debet accipi, vt euanescat posito $x = 0$.

Corollarium 3.

242. Si $m = 1$, vis centrifuga euanescet, et propterea linea quaesita erit recta. Fit autem ex aequatione $ddy = 0$, quae est proprietas lineae rectae.

Corollarium 4.

243. Si $m = 0$ tum tota pressio euanescit, quare tum prodibit curua, quam corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro hac igitur curua habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(b - a + \int Pdx)}}$.

Corollarium 5.

244. Si m est vnitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi normali, et propterea curua AM erit concaua deorsum. Ponamus igitur in A curuam esse normalem ad AP, erit $b = a$. Posito igitur $b = a$, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}}\,dx}{\sqrt{((a + \int Pdx)^{1-m} - a^{1-m})}}$.

Corollarium 6.

245. Pro motu libero igitur, quo casu est $m=0$, inuenietur curua a corpore descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiiciatur, ex hac aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int Pdx}}$.

Exemplum 1.

246. Sit vis sollicitans vniformis seu $P=g$ erit $\int Pdx = gx$. Casibus ergo quibus $m > 1$, et corpus in A ex quiete descendit, aequatio pro curuis quaesitis, scripto gc loco a, erit haec $dy = \frac{x^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(c^{m-1} - x^{m-1})}}$. At si sit $m < 1$, et corpus in A celeritate altitudini a debita proiiciatur horizontaliter, curua super qua corpus moueri debebit, scripto gc loco a, exponetur hac aequatione $dy = \frac{c^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m} - c^{1-m})}}$. Hae ergo curuae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$, vel $\frac{m}{1-m}$ fuerit numerus integer affirmatiuus. Hoc vero euenit si m fuerit terminus vel ex hac serie 3, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ etcet.

Corollarium 7.

247. *Si* igitur tota pressio triplo debeat esse maior quam vis normalis, curua erit circulus tangens

gens rectam AP in A. Namque erit $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ seu $y = c - \sqrt{(c^2 - x^2)}$, aequatio ad circulum radii c.

Corollarium 8.

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis, seu vis centrifuga aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curua cyclois cuspide verticalem in A tangens. Aequatio enim erit $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$.

Exemplum 2.

249. Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curuae eiusmodi, vt pressio tota quam curua sustinet, sit duplo maior quam vis normalis seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur $m = 2$, et pro curua quaesita haec habebitur aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a - \int Pdx)}}$ Seu dicto $\int Pdx = X$ erit $dy = dx\sqrt{\frac{X}{a-X}} = \frac{X\,dx}{\sqrt{(aX - X^2)}}$ Hoc exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curuas huius proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

Corollarium 9.

250. Perspicitur ergo infinitas esse curuas quaestioni satisfacientes, propter quantitatem a arbitrariam. Atque infinitae hae curuae omnes tangent rectam AP in A.

Scholion. 1.

251. Ex ſolutione huius problematis apparet, quomodo problema inuerſum, quo curua et ratio inter totam preſſionem et vim normalem datur, at quantitas vis ſollicitantis deorſum tendentis quaeritur, ſolui debeat. Cum enim ſit $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$, ſeu poſito $dy = p dx$, $v^{\frac{m-1}{2}} \surd (1+pp) = a^{\frac{m-1}{2}} p$ erit $v = \frac{ap^{\frac{m-1}{2}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}} = b + \int P dx$; hincque differentiando $P dx = \frac{2 ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}$. Conſequenter inuenitur $P = \frac{2 ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}} dx}$. Vbi notandum, celeritatem initialem iam eſſe datam, nam formula $\frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}}$, ſi in ea ponatur $x=0$, dat b.

Scholion 2.

252. Simili modo ſi motus corporis ſeu celeritas eius in ſingulis locis detur, atque relatio preſſionis totius ad vim normalem, inuenietur ex celeritate ſtatim potentia ſollicitans. Vt ſit v altitudo debita celeritati in M, erit ob $b + \int P dx = v$;

$= v$; $P = \frac{dv}{dx}$; atque aequatio $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$ dabit naturam curuae requifitae. Cum enim v fit data, dari debet vel in x vel s et conftantibus quantitatibus, fcilicet quae ad curuae naturam exprimendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypothefi virium centripetarum vel plurium potentiarum follicitantium propofita non habent plus difficultatis, etiamfi ad magis perplexas aequationes perueniatur. Atque cum fimplicia exempla in medium proferre non liceat ad illuftrandum, ea potius relinquo; hocque eo magis, quod in fequentibus, vbi de brachyftochronis agetur, eiusdem naturae curuae prodeant, quas ibi diligentius expofiturus fum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quibus motus quaedam proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potentia follicitante curua quaeritur, vel cum curua ipfa, potentia follicitans. Problemata vero nimis facilia, vt quando vel fcala celeritatum, vel fcala temporum daretur, praetermitto, cum ex expreffione celeritatis vel potentia follicitans, vel ipfa curua fponte fluat, atque temporis expreffio facillime ad celeritatem deducat. Hanc ob rem huiusmodi afferemus quaeftiones, in quibus non ipfae celeritates vel tempora dantur, fed relationes quaedam ab iis pendentes.

PRO-

PROPOSITIO 28.

Problema

Tabula VI. Fig. 3.

253. *Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; inuenire curuam* AM *super qua corpus descendens motu aequabili deorsum feratur, seu aequabiliter a horizontali* AB *recedat.*

Solutio.

Positis $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, et potentia sollicitante $= P$, sit celeritas corporis initialis in A debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b + \int P dx$. Quare tempusculum, quo elementum M percurritur, est $\frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$. Quia autem motus per AM respondere debet motui aequabili per AP, concipiatur corpus motum super AP celeritate constante debita altitudini b, debebit tempus per Pp aequari tempori per Mm, vnde habebitur $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$, seu $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dx}$. Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, vt curua in A tangat verticalem AP, et corpus primo principio recta descendat. Nam quia propter motum acceleratum necesse est vt curua continuo magis ad horizontem inclinetur, eius initium commodissime sumetur in A, vbi curua est verticalis. Prodiitque ergo pro hac curua aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dx}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

254. Haec ergo curua hanc habet proprietatem, vt quo maior sit corporis celeritas, eo magis quoque curua in eo loco ad horizontem sit inclinata.

Corollarium 2.

255. In loco ergo supremo, vbi celeritas corporis est minima, inclinatio curuae debet esse minima, seu tangens curuae in eo loco debet esse verticalis.

Corollarium 3.

256. Celeritas igitur initialis $\sqrt{b}$ non potest esse nulla, quia ei aequalis est celeritas respectiua, qua corpus deorsum progreditur, seu ab horizontali AB recedit.

Scholion I.

257. Vocatur haec curua linea aequabilis descensus, quia corpus super ea descendens aequabili motu deorsum progreditur. Lineae huius inuentio extat in Act. Erud. Lips. A.1690. pro hypothesi grauitatis, seu potentiae sollicitantis vniformis. Satisfacere autem huic quaestioni demonstratur ibi parabola cubicalis Neiliana, quae eadem in exemplo sequente prodibit.

Exemplum I.

258. Sit potentia sollicitans vniformis seu $P=g$, erit $\int P dx = gx$. Quare pro curua quaesita

 habe-

habebitur iſta aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae integrata praebet hanc, $3y\sqrt{b} = 2x\sqrt{gx}$, ſeu $\frac{9by^2}{4g} = x^3$, quae eſt pro parabola Neiliana cuſpide in A verticalem AP tangente, cuius parameter eſt $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali, alia eſt ſumenda parabola.

Exemplum 2.

259. Sit potentia ſollicitans P poteſtati cuicunque abſciſſarum data linea auctarum proportionalis vt $P = \frac{(a+x)^n}{f^n}$, erit $\int Pdx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$ Quamobrem pro curua ſatisfaciente habebitur iſta aequatio $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{((a+x)^{n+1} - a^{n+1})}$. Si $a = o$, ita vt potentia ſollicitans P ſit poteſtati exponentis n diſtantiarum corporis a horizontali AB proportionalis, erit $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{x^{n+1}}$, cuius integralis eſt $y\sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$, ſeu $\frac{(n+1)(n+3)^2}{4}bf^n y^2 = x^{n+3}$. At $n+1$ debet eſſe numerus affirmatiuus, alioquin $\int Pdx$ fieret infinitum, quia euaneſcere debet facto $x = o$. Fit ergo $n+3 > 2$; quare ſatisfaciunt parabolae verticibus in A verticalem AP tangentes. Vt ſi $n = 1$ ſeu $P = \frac{x}{f}$, ſatisfaciet parabola Appolloniana, cuius parameter eſt $2\sqrt{2bf}$.

Scholion 2.

260. Ex huius propoſitionis ſolutione perſpicitur quomodo eius inuerſa, qua data curua, quae ſit

ſit linea aequabilis deſcenſus, requiritur potentia ſollicitans. Cum enim ſit $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}$, erit $\int Pdx = \frac{bdy^2}{dx^2}$. Ex qua oritur poſito dx conſtante, $P = \frac{2bdyddy}{dx^2}$. Perſpicitur ergo potentiam P a celeritate initiali $\sqrt{b}$ pendere. Curua vero data ita eſſe debet comparata, vt in A tangat verticalem AP. Si curuae radius oſculi in M dicatur r, erit $P = \frac{2bds^3dy}{rdx^4}$. Quare ſi ex. gr. curua AM fuerit circulus tangens AP in A, cuius radius $= a$, erit $r = a$; $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Pro circulo ergo erit $P = \frac{2a^2bx}{(a^2-x^2)^2}$. Celeritas vero in M debita eſt altitudini $b + \int Pdx = \frac{a^2b}{a^2-x^2}$.

Corollarium 4.

261. Patet ceterum ex aequatione, quam inuenimus, $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$ tempus quo arcus AM deſcribitur, aequale eſſe tempori, quo corpus vniformiter celeritate altitudini b debita abſciſſam AP percurrit. In hoc ipſo ſcilicet natura lineae aequabilis deſcenſus nititur.

PROPOSITIO 29.

Problema.

262. *Trahente vniformi potentia vbique verticaliter deorſum, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus aequabiliter verſus datam plagam* AP *progreditur.*

Tabula VII. Fig. 3.

 So-

Solutio.

Sit AM curua quaesita, et pro axe sumatur eius tangens AP, quae versus datam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, vt corpus super AM motum a potentia vniformi g sollicitatum eodem tempore ad M perueniat, quo corpus motu aequabili nempe celeritate $\sqrt{b}$ latum abscissam respondentem AP percurrit, eritque celeritas initialis in A debita altitudini b. Dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, ducaturque verticalis AQ in Q secans horizontalem MQ. Celeritas igitur corporis in M tanta erit, quantam in Q cadendo per AQ cum sua celeritate $\sqrt{b}$ acquireret; quare celeritas corporis in M debita erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Per conditionem problematis vero debet esse $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}}$, vnde oritur haec aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{gz}$. At z in x et y dabitur ex angulo PAQ; sit sinus huius anguli $= m$, erit cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit $\sqrt{(1-m^2)} : m = AP(x) : PO$, ex quo erit $PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$, ideoque $MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)} - mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$. At AO fiet $= \frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Deinde ob $1 : m = MO : OQ$, erit $OQ = \frac{my\sqrt{(1-m^2)} - m^2 x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Consequenter $AQ = z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, et hinc $dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto prodit $dz\sqrt{b} = dx\sqrt{b(1-m^2)} + mdx\sqrt{gz}$, quae transit in hanc $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}$.

Cu-

Cuius integralis inuenitur $x = \frac{2\sqrt{bz}}{m^2 g} - \frac{2b\sqrt{(1-mm)}}{m^2 g}$ $l\frac{m\sqrt{gz}+\sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}$. Quae aequatio, loco z valore $my + x\sqrt{(1-m^2)}$ substituto, dat naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

263. Curua ergo satisfaciens semper est linea transcendens, nempe a logarithmis pendens, nisi sit m vel o vel 1, i. e. nisi recta AP vel sit verticalis vel horizontalis.

Corollarium 2.

264. Si igitur $m = o$ problema cum praecedente conuenit, fit enim $z = x$, ideoque curua exprimetur hac aequatione $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae dat parabolam cubicalem vt supra.

Corollarium 3.

265. Si $m = 1$ fit linea AP horizontalis, et $z = y$. Habetur ergo $dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}}$, seu $x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}}$, seu $x^2 = \frac{4by}{g}$. Haec ergo curua est ipsa proiectoria, quam corpus in A celeritate $\sqrt{b}$ horizontaliter proiectum libere describit. Haec enim curua, vt ex superiore libro intelligitur, hanc habet proprietatem, vt motus horizontalis sit aequabilis.

Corollarium 4.

266. Si x et y, et consequenter z est valde paruum, erit $l(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)} + \frac{m^3gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$, quam proxime. Initium ergo

go curuae AM exprimetur hac aequatione $x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$ seu ob $z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, ista $y = \frac{2(my+x\sqrt{(1-m^2)})\sqrt{g(my+x\sqrt{(1-mm)})}}{3\sqrt{b}(1-m^2)}$. Quae reducitur ad hanc $\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{(1-m^2)})^3$.

Corollarium 5.

267. Si $m = 1$, seu si linea AP est horizontalis, et series logarithmo illi aequalis continuetur in infinitum, haecque series loco illius substituatur, termini omnes prae infinitesimo ∞ euanescent. Dabit autem infinitesimus $z = 0$, seu $y = 0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quoque satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum, nam corpus super recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus eius horizontalis est aequabilis.

Scholion 1.

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae prodit si ponatur $m = 1$, parabolam tantum praebeat, et rectam horizontalem excludere videatur. Sed notandum est, lineam rectam horizontalem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere cum motus in ea sit aequabilis, atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progrediatur. Perspicuum autem est aequationem nostram generalem hanc rectam comprehendere non posse, quia rectam AP nusquam tangit, nisi in casu $m = 1$, quo cum ea congruit.

gruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro casu etiam $m = 1$ linea recta non directe inueniri queat.

Scholion 2.

269. Manifestum quoque est eadem opera problema latiori sensu acceptum solui potuisse, si scilicet potentia sollicitans non vniformis sed variabilis vtcunque esset posita. Namque substituto P loco g, et $\int Pdz$ loco gz in aequatione differentiali, prodisset haec aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdz}$ pro curua quaesita. Habet vero z eundem valorem quem ante. Quare si P ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit $\int Pdz$ vel integrari vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curua poterit construi, peruenietur enim ad hanc aequationem $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{(\int Pdz + \sqrt{b}(1-m^2))}}$, in qua variabiles x et z sunt a se inuicem separatae. Nolui autem problema nimis lata significatione confusum efficere. Quando enim latior significatio neque plus difficultatis habet in se, neque ad peculiarem vsum accommodari potest, eo relicto particulare tantum problema pertractare constitui. Propter eandem rationem sequens problema isochronae paracentricae in hypothesi tantum potentiae vniformis et deorsum directae resoluo.

PRO-

PROPOSITIO 30.
Problema.

Tabula VII. Fig. 4.

270. *In hypothesi potentiae sollicitantis vniformis et deorsum tendentis inuenire curuam* AM *super qua corpus descendens aequabiliter a dato puncto* C *recedit.*

Solutio.

Sit AM curua quaesita, eius sumatur tangens CA, quae per datum punctum C transit, erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec celeritas tota ad recedendum a C impenditur, in aliis curuae elementis necesse est, vt celeritas sit maior, eo quod eius tantum pars ad recessum insumitur. Punctum A ergo erit supremum curuae quaesitae. Sit igitur celeritas corporis in A debita altitudini b, hacque celeritate concipiatur corpus per AP vniformiter moueri: debebit itaque hic motus cum descensu corporis super curua AM ita conuenire, vt ad quaeque puncta P et M aequaliter ab C distantia simul perueniatur. Posita celeritate in M debita altitudini v, ducatur $CP = CM = x$, et sit sinus ang. $PCM = t$, posito sinu toto $= 1$. Ducantur arcus circulares PM et pm centro C, erit $Mn = Pp = dx$, et ang. pCm sinus $= t + dt$. Quare erit sinus ang. $mCn = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{mn}{x}$. Erit igitur $mn = \frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}}$, atque $Mm = \sqrt{(dx^2 + \frac{x^2dt^2}{1-tt})}$. Cum ergo elementum Mm celeritate $\sqrt{v}$

co-

eodem tempore deſcribi debeat, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$, erit $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{(\frac{x^2}{v} + \frac{x^2 dt^2}{(1-tt)v})}$ ſeu $dx\sqrt{(1-tt)}(v-b) = x\,dt\sqrt{b}$. Requiritur ergo vt v determinetur. Ad hoc ducatur ex C verticalis CQ et horizontales AD, et MQ; poſtquam ergo corpus ex A ad M deſcendit, deorſum peruenit interuallo DQ. Quare poſita potentia ſollicitante $= g$ erit $v = b + g.\,DQ = b + g.\,CQ - g.\,CD$. Sit $AC = a$, ſinus anguli $ACD = m$, erit eius coſinus $= \sqrt{(1-m^2)}$, vnde erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$, et coſinus ang. $MCQ = mt + \sqrt{(1-m^2)}(1-t^2)$. Quam ob rem erit $CQ = mtx + x\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Ex quibus conficitur $v = b - ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Quo loco v valore ſubſtituto prodibit iſta aequatio $dx\sqrt{(1-tt)}(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)}) = xdt\sqrt{b}$, ſeu haec $\frac{dx}{x}\sqrt{(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)})} = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-t^2)}}$. Quae aequatio exprimit naturam curuae quaeſitae, et, ſi indeterminatae x et t a ſe inuicem ſeparari poſſent, ipſa curua conſtrui poſſet. Q. E. I.

Corollarium I.

271. Perſpicuum igitur eſt ex aequatione inuenta innumerabiles curuas quaeſito ſatisfacere, ob tres quantitates angulum ſcilicet ACD, diſtantiam AC et celeritatem $\sqrt{b}$, qua corpus a fixo puncto C recedit, quae pro lubitu variari poſſunt.

Corollarium 2.

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis pro arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curuas quaesito satisfacientes. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curuae satisfacientes exhiberi non possunt.

Corollarium 3.

273. Quod ad figuram curuarum harum attinet, intelligitur, eas omnes in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter enim curuae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet; Excepto casu quo CAP fit linea horizontalis, tum enim haec ratio cessat.

Corollarium 4.

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aeque soluit problema ac iste AM. Inuenitur enim eadem ex aequatione, si modo t seu angulus PCM accipitur negatiuus.

Corollarium 5.

275. Ex sola autem aequationis inuentae inspectione perspicitur eam duobus casibus separationem indeterminatarum admittere, quorum alter est si $a = o$, alter si $m = 1$. Illo scilicet casu euanescit distantia AC et punctum A in C incicidit: hoc vero casu recta CP fit horizontalis.

Hos

Hos igitur ambos casus in sequentibus duobus exemplis euoluemus.

Exemplum I.

276. Incidat ergo punctum A in C seu corpus descensum incipiat in ipso puncto C; fiet $a = o$. Hoc ergo casu aequatio pro curua quaesita abibit in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, in qua indeterminatae a se inuicem sunt separatae. Constructio igitur curuae quaesitae per quadraturas confici poterit; fiet enim $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, quae integratio ita debet absolui, vt facto $t = o$ fiat $x = o$. Namque generalis aequatio ita debet integrari vt posito $t = b$ fiat $x = a$. Hoc igitur casu integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$ ita est accipiendum, vt facto $t = o$ ipsum euanescat. Ad constructionem huius integralis vero melius perspiciendam, pono cosinum anguli MCQ seu $mt + \sqrt{(1-m^2)(1-tt)} = q$, quo facto fiet sinus ang. MCm, seu $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}$. Hisque substitutis habebitur ista aequatio: $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{-dq}{\sqrt{(q-q^3)}}$, quod integrale ita est accipiendum, vt facto $q = \sqrt{(1-m^2)}$ fiat $x = o$.

Corollarium 6.

277. Si ipsi b diuersi valores attribuantur, omnes curuae quae oriuntur erunt inter se simi-

 les,

les, manente enim angulo MCP, distantia CM proportionalis est accipienda ipsi b altitudini generanti celeritatem initialem

Corollarium 7.

278. Quicunque ergo fuerit angulus ACQ, constructio non immutatur, sed tantum constans adiicienda. Quare constructio inseruiens vni casui ad omnes casus potest accommodari.

Scholion 1.

279. Problema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo jam erat propositum et solutum in Act. Lips. A. 1695. atque solutiones quae ibi extant conueniunt apprime cum casu huius exempli, vniuersalis enim solutio illo loco non est data. Quamobrem casus exempli sequentis nouas prorsus dare videtur curuas huic quaestioni satisfacientes. At quia sequens constructio cum hac conuenit, quanquam ipsae curuae sint prorsus differentes, tamen etiam sequens casus in iis, quae hac de re tradita sunt, contineri censendus est. Vocantur autem istiusmodi curuae isochronae paracentricae, quia motus super iis a centro fixo fit aequabilis.

Exemplum 2.

280. Sit linea CAP horizontalis, fiet $m = 1$ atque in aequatione generali euanescet terminus $ga\sqrt{(1-m^2)}$. Hoc igitur casu aequatio fit vt ante

te ſeparabilis, transmutabitur enim generalis aequatio in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^3)}}$, ſeu $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^3)}}$ quod integrale ita eſt accipiendum, vt poſito $t=0$ fiat $x=a$. Quare $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^3)}}$ ita integrato, vt euaneſcat poſito $t=0$ erit $\frac{2\sqrt{gx}-2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}} = \int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^3)}}$. Quae conſtructio ergo cum praecedente conuenit.

Scholion 2.

281. An praeter hos duos caſus alii inueniri queant, qui ſeparationem indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine quidem, quantum ſcio, alius eſt erutus, quamobrem non neceſſe eſſe iudico, vt huic materiae diutius immorer.

PROPOSITIO 31.

Problema.

282. *Potentia ſollicitante exiſtente uniformi et deorſum tendente, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus data cum celeritate initiali ita moueatur, vt aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum* C *abſoluat.*

Tab. VIII. Fig. 1.

Solutio.

Sumatur initium curuae in loco quodam A in quo recta CA in ipſam curuam eſt normalis. Sitque celeritas in A debita altitudini b, et $AC = a$; erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quanti-

 tati

tati celeritas angularis in singulis punctis M expressa debet esse aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini v, et $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiat vt $Mm : Mn = \sqrt{v} : \frac{Mn\sqrt{v}}{Mm}$, quae quantitas per MC diuisa dat celeritatem angularem $= \frac{Mn\sqrt{v}}{Mm \cdot MC}$, quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$ habebitur haec aequatio $Mn \cdot a\sqrt{v} = Mm \cdot MC \cdot \sqrt{b} = Mm \cdot x\sqrt{b}$. Sit jam ducta verticali DCQ, sinus ang. $ACD = m$, erit cosinus eius $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCD sit $= t$, erit cosinus $= \sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$ et $CQ = -x\sqrt{(1-tt)}$, atque sinus ang. $MCm = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x}$, vnde fit $Mn = \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ et $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - tt\,dx^2 + x^2 dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. At quia corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit $v = b + g \cdot DQ = b + ga\sqrt{(1-m^2)} - gx\sqrt{(1-tt)}$. Quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis orietur haec aequatio, $bdx^2(1-tt) = a^2 b\,dt^2 + ga^3 dt^2 \sqrt{(1-m^2)} - ga^2 x\,dt^2 \sqrt{(1-tt)} - bx^2 dt^2$, seu $dx\sqrt{b} = \frac{dt\sqrt{(a^2 b + ga^3\sqrt{(1-m^2)} - ga^2 x\sqrt{(1-tt)} - bx^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. Quae aequatio ita integrata vt posito $t = m$ fiat $x = n$, exprimit naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium I.

283. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introducantur, fiatque $\sqrt{(1-m^2)} = n$ et $\sqrt{(1-tt)} = q$; erit $dx\sqrt{b} = \frac{-dq\sqrt{(a^2 b + gna^3 - ga^2 qx - bx^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$ seu

seu $\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b(a^2-x^2)+ga^2(na-qx))}}$, quae ita est integranda, vt posito $q=n$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

284. Vbi curua ad radium CM est normalis, ibi ob euanescens dx erit $b(a^2-x^2)=ga^2(qx-na)$. Quoties ergo est $q=\frac{a^2b+gna^3-bx^2}{ga^2x}$, erit curua in radium CM normalis. Quia autem q intra limites $+1$ et -1 continetur; x non potest esse maior data quantitate; nam posito $x=\infty$ fieret $q=\infty$, quod esset absurdum.

Corollarium 3.

285. Si CM est normalis in curuam erit celeritas angularis $=\frac{\sqrt{v}}{MC}=\frac{\sqrt{(b+gna-gqx)}}{x}$, quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Maxima ergo est illa celeritas angularis si $q=-1$. Ille autem motus angularis eo fit minor quo maior est x. Eo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliqua est curua ad radium MC. Quare curua non vltra datam distantiam infra C descendere poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione $x\sqrt{b}=a\sqrt{(b+gna+gx)}$, nempe $x=\frac{ga^2}{2b}+a\sqrt{(\frac{g^2a^2}{4b^2}+\frac{gna}{b}+1)}$. Haec ergo est maxima curuae a puncto C distantia.

Corollarium 4.

286. Cum igitur curua non vltra datam distantiam a centro fixo C distare queat, curua haec erit

erit in se rediens. Scilicet vel post vnam reuolutionem vel post duas vel post tres etc. vel etiam post infinitas reuolutiones in se redibit. Prout litterae a, b, n et g fuerint assumtae.

Exemplum I.

287. Si potentia sollicitans euanescit fit $g = o$, et corpus aequabiliter promouebitur. Tum igitur pro curua descripta haec habebitur aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1 - tt)}}$, cuius integralis per log. est $\sqrt{-1}\, l\left(\frac{x\sqrt{-1} - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{c}\right) = \sqrt{-1}\, l(t\sqrt{-1} - \sqrt{(1 - tt)})$, seu $x\sqrt{-1} - \sqrt{(a^2 - x^2)} = ct\sqrt{-1} - c\sqrt{(1 - tt)}$. Quae reducta dat $(a^2 - c^2)^2 = 4(a^2 + c^2)ctx - 4c^2x^2 - 4a^2c^2t^2$. Incidat recta AC in verticalem CD hoc enim perinde est, ob euanescentem potentiam g, debebit ergo fieri $x = a$, posito $t = o$, ex quo fit $a^2 + c^2 = o$, atque $a^4 = a^2x^2 + a^4t^2$ seu $x^2 = a^2(1 - tt)$. Quae aequatio est pro circulo diametri a per punctum fixum C transeunte. Quando enim motus in circulo est aequabilis, motus quoque respectu cuiusque puncti in peripheria erit aequabilis.

Scholion.

288. Perspicuum autem est hoc casu peripheriam circuli quoque satisfacere, cuius centrum est in puncto fixo C, quippe quae solutio est facillima et sua sponte se prodit. Quamobrem maxime mirandum est hunc casum in solutione non contineri.

neri. Ratio vero huius fimilis prorfus eft eius, quam fupra §. 268. dedimus, vbi fimile paradoxum obferuauimus. Ad circulum centrum in C habentem defignandum prodire debuiffet $x = a$, feu $dx = o$, quod vero quia x vt quantitas variabilis confideratur non fieri potuit, praefertim cum in eadem aequatione folutio alia fit contenta, in qua x eft quantitas reuera variabilis. Ex prima vero aequatione pofito $v = b$, quae eft $Mn. a = Mm. x$, intelligi poteft circulum fatisfacere, nam fi vbique eft $x = a$ erit quoque $Mn = Mm$. Magnum autem arbitror fubfidium ad conftruendas curuas huic problemati fatisfacientes proditurum, fi tali methodo folutio inueniri poffe, quae fponte pro cafu motus aequabilis circulum centrum in C habentem effet datura. Cum enim cafus fimpliciffimus ita fit inuolutus et abditus, vt elici vix queat, coniicere licet, alias faepe curuas fimplices in generali quapiam folutione contineri, quae fint erutu difficillimae.

PROPOSITIO 32.

Problema.

289. *Si corpus attrahatur vi quacunque ad centrum virium* C, *inuenire curuam* AM *fuper qua corpus data cum celeritate defcendens, motu aequabili verfus* C *feratur.* Tab. VIII, Fig. 2.

Solutio.

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini b; erit recta CA tangens curuae in A, quia corpus in A directe ad C moueri debet. Sit AC$=a$, et CM$=x$; celeritas in M debita altitudini v, et vis centripeta in M$=$P, erit $v=b-\int Pdx$, quod integrale ita est accipiendum vt facto $x=a$, euanescat, fiatque $v=b$. Celeritas vero in M tanta esse debet, qua elementum Mm eodem tempusculo absoluatur, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$ Erit ergo $\sqrt{b}:\sqrt{v}=Pp:Mm=MT:MC$, vnde prodibit ista aequatio $b.MC^2=v.MT^2=b.MT^2-MT^2.\int Pdx$. Dicatur perpendiculum CT in tangentem $=p$, erit $bp^2=-(x^2-p^2)\int Pdx$, seu $p^2=\frac{-x^2\int Pdx}{b-\int Pdx}$. Vel si sinus ang. ACM ponatur $=t$ erit $\frac{mn}{MC}=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$. Vnde sequens emergit aequatio: $\frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{x}\sqrt{-\int Pdx}$. Quarum vtraque, si quidem P per x datur, ad curuam construendam est apta. Q. E. I.

Corollarium I.

290. Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportionalis, nempe $P=\frac{x^n}{f^n}$, erit $\int Pdx=\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hoc substituto habebitur pro curua AM sequens aequatio $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{x}$

$\frac{-dx}{x}\sqrt{\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)bj^n}}$. Quae aequatio ita debet integrari vt facto $t=0$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

291. Si $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiatur, vt fiat $=0$ si $t=0$, prodibit ex illa aequatione integrata haec

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-2\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{(n+1)\frac{3}{2}\sqrt{bj^n}}+\frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\frac{3}{2}\sqrt{bf^n}}$$

$$l\frac{a^{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}=BS,$$ si centro C radio $BC=1$ descriptus fuerit arcus circuli BS. Ex quo patet curuam AM infinitos habere gyros antequam corpus in C perueniat. Nam posito $x=0$ fit $BS=\infty$.

Corollarium 3.

292. Pendet igitur constructio huius curuae partim a quadratura circuli, partim a logarithmis si $n+1$ est numerus affirmatiuus. At si $n+1$ est numerus negatiuus, is terminus qui per logarithmos erat datus, ad quadraturam circuli quoque reducitur.

Corollarium 4.

293. Curua haec punctum habebit flexus contrarii, vbi est $dp=0$. Ad hoc igitur inue-

 nien-

niendum sumatur aequatio $pp = \frac{-x^2 \int P dx}{b - \int P dx}$, ex qua differentiata positoque $dp = 0$ prodibit $bPx = 2(\int P dx)^2 - 2b\int P dx$.

Corollarium 5.

294. In casu igitur quo $P = \frac{x^n}{f^n}$ punctum flexus contrarii ibi erit, vbi est $(n+1)^2 bf^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1) bf^n (a^{n+1} - x^{n+1})$. Vnde haec oritur aequatio $\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = -\frac{(n+3)bf^n}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{((n+3)^2 b^2 f^{2n} + 8 a^{n+1} bf^n)}$. Quae in integrali substituta dabit angulum ACM in quo est punctum flexus contrarii.

Scholion. 1.

295. Cum autem de natura huiusmodi curuarum difficile sit in genere quicquam producere, ad casus speciales descendendum erit principales, id quod in sequentibus exemplis efficere visum est.

Exemplum 1.

296. Sit vis centripeta ipsis distantiis proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ fiet $n = 1$. Posito ergo arcu BS$= s$ curua quaesita exprimetur ista aequatione $s = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}}\, l\frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Ex qua

qua aequatione data quauis puncti M a C distantia reperitur angulus BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Inter distantiam MC, x vero et perpendiculum CT $= p$ aequatio haec erit $pp = \frac{a^2x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}$. Huius curuae punctum flexus contrarii erit vbi est $dp = o$, hoc autem vbi est $x^4 = 2a^2x^2 + 4bfx^2 - a^4 - 2abf$, seu $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2bf + b^2f^2)}$, quia x non maior esse potest quam a. Hinc fit $x = \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, atque $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2+bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2+bf)}}$. Anguli ergo, quem curua in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM cosinus erit $= \frac{\sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2+bf)}}$. Aequatio vero curuae in seriem conuersa erit; posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$, haec $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} +$ etc. In ipso ergo curuae principio, vbi x non multo minor est quam a, seu y valde paruum erit $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}$. Deinde ex ipsa aequatione apparet facto $x = o$ fore $s = \infty$, quare curua infinitis spiris ambit centrum C, eritque quando corpus centro iam proximum est $\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}$. Ex quo sequitur proxime circa centrum C curuam abire in logarithmicam spiralem.

Exemplum 2.

297. Sit $n = -1$, seu $n + 1 = o$, qui casus ex ipsa aequatione differentiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$, $\int P dx = fl\frac{x}{c}$, vnde habebitur ista

 aequa-

aequatio $ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}} \sqrt{fl\frac{a}{x}}$, cuius integralis est $s = \frac{2f(la-lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}$. Altera aequatio inter perpendiculum p et x, erit haec $pp = \frac{fxxl\frac{a}{x}}{b+fl\frac{a}{x}}$. Ex qua inuenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo est $b = 2f(l\frac{a}{x})^2 + 2bl\frac{a}{x}$ seu $l\frac{a}{x} = \frac{-b+\sqrt{(bb+2bf)}}{2f}$. Hoc ergo habebitur sumendo $s = \frac{(-b+\sqrt{(bb+2bf)})^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2a}}$. Perspicitur porro si fiat $x=0$, fore $s=\infty$, seu curuam infinitis spiris centrum C circumdare, hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx} = 1$, seu $p = x$. Vltimo ergo curua in circulum infinite paruum abit.

Exemplum 3.

298. Ponatur $n = -2$ vt vis centripeta sit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, erit $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-fdx}{x}\sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds$. Ponatur $\frac{a-x}{x} = yy$, fiet $\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yy\,dy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}$. Exprimit vero $\int\frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ sit hic arcus $= t$; erit $t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Vbique ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis differentiae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem, posito radio $= 1$. Si x ponatur $= 0$, fiet $s = \infty$, ex quo sequitur curuam per infinitas spiras ad centrum C descendere.

Prae-

Praeterea ob $-\int P dx = \frac{ff(a-x)}{ax}$ erit $pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}$ Ex quo sequitur si x euanescat fore $\frac{pp}{xx} = 1$, seu curuam vltimo quoque in circulum infinite paruum abire. Si fuerit $ab = ff$, erit $pp = \frac{xx(a-x)}{a}$, et $t + \frac{s}{2} = V\frac{a-x}{x}$ Punctum flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, vbi est $2ax = 3xx$, seu vel $x = o$ vel $x = \frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab = 4ff$, erit $t + s = V\frac{a-x}{x}$; et punctum flexus contrarii habebitur capiendo $x = aV\frac{1}{3}$.

Scholion 2.

299. Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si vis centripeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{x^n}{f^n}$; consideretur aequatio inter p et x, quae erit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1} - x^{n+1}}$. Vbi duo distinguendi sunt casus alter quo $n+1$ est est numerus affirmatiuus alter quo est negatiuus. Si $n+1$ est numerus affirmatiuus facto $x = o$ fit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1}}$. Hoc ergo casu curua AM circa centrum C abit in logarithmicam spiralem. At si $n+1$ est numerus negatiuus facto $x = o$ fit $\frac{pp}{xx} = 1$. His ergo in casibus curua in C abit in circulum infinite paruum. Fit his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite magna,

et

aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit sequens aequatio $bx^4 = a^2bp^2 - a^2p^2\int Pdx$, seu $p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{(b-\int Pdx)}}$. Centro C radio BC $= 1$ describatur arcus circuli BS, qui dicatur $= s$, erit $1 : ds = x : mn$, vnde erit $mn = xds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}$. Cum nunc sit $x : p = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)} : xds$ fiet $p = \frac{xxds}{\sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto habebitur $bdx^2 + bx^2ds^2 = a^2bds^2 - a^2ds^2 \int Pdx$, hincque $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int Pdx)}}$. Ex qua aequatione curua quaesita poterit construi. Q.E.I.

Corollarium 1.

301. Quo minor fit x, eo maior fiet $b - \int Pdx$, quare quo minor fit x eo minor quoque fiet $\frac{p}{x}$, seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b-\int Pdx)}}$.

Corollarium 2.

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione x non potest fieri maior quam a, fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nullus potest esse normalis in curuam, nisi qui est maximus nempe $=$ AC.

Scholion 1.

303. Per se quidem manifestum est in quacunque vis centripetae hypothesi circulum cen-

tro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo vniformiter moueri debebit. Etiamsi autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet; vt iam supra innuimus.

Scholion 2.

304. Perspicuum autem est nullam aliam curuam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curuis fieri non potest, vt omnes rectae ex C eductae et in curuam normales sint inter se aequales. Quae igitur curuae praeter circulum problema soluunt, eae per ipsum centrum C transire debent, vt plus vno radio MC non sit in curuam normali. Cuiusmodi ergo sint hae curuae in sequente exemplo videamus.

Exemplum.

305. Sit vis centripeta distantiis a centro directe proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ erit $-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}$. Quo substituto pro curua sequens prodit aequatio $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b + \frac{a^2}{2f})(a^2 - x^2)}}$. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus BS $= t$, erit $s = A.t$; vnde fiet $A.t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}}$.

(A. 1 —

$(A.1 - A\frac{x}{a})$. Seu arcus cuius cosinus est $\frac{x}{a}$ erit $= A.t \sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$. Vnde constructio curuae facilis fluit, eritque curua algebraica quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est numerus rationalis. Sit $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m$ seu $2bf = \frac{a^2}{m^2-1}$, erit $\frac{m\,dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cuius integralis per logarithmos imaginarios est $ml(t\sqrt{-1} + \sqrt{(1-tt)}) = l(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a})$ seu $(t\sqrt{-1} + \sqrt{(1-tt)})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum $MQ = y$ et posito $CQ = u$, erit $1 : t = x : y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit $(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Vt fit $m = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebitur ista aequatio $(\frac{y\sqrt{-1}+u}{x})^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Quae reducta dat hanc $x^2 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^2$, seu $y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ et $u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}$. At si inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur ea erit ordinis sexti haec $(y^2+u^2)^3 = a^2(u^2-y^2)^2$ In hac curua applicata erit maxima si $x = \frac{2b}{3}$, seu si sumatur $CQ = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{5}{6}} = a\sqrt{\frac{10}{27}}$, tum enim erit $QM = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{2}{27}}$. In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit vbi est $my\sqrt{(a^2-x^2)} = ux$.

PROPOSITIO 34.
Problema.

306. *Sit potentia sollicitans vniformis* **g**, *et vbique deorsum tendat, deturque curua* **AT**, *inue-* Tab. VIII. Fig. 4.

S 2 *nire*

nire curuam AM, *super qua corpus ita descendat*, *vt tempus per arcum quemcunque* AM *proportionale sit radici quadratae ex applicata respondente* PT *curuae datae* AT.

Solutio.

Ponatur abscissa communis $AP = x$, curuae AT applicata $PT = t$, dabitur ergo, quia curua AT datur aequatio inter x et t, quae talis esse debebit, vt euanescente x fiat quoque $t = o$, quia motus initium in A ponitur, et tempora a puncto A computantur. Sit porro curuae quaesitae AM applicata $PM = y$, et arcus $AM = s$. Debita sit celeritas initialis in A altitudini b. Erit ergo celeritas in M debita altitudini $b + gx$, et tempus quo arcus AM absoluitur $= \int \frac{dt}{\sqrt{(b+gx)}}$, quod aequale esse debet ipsi $\sqrt{t}$. Habebitur ergo haec aequatio $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \sqrt{t}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ Vnde $dt^2(b+gx) = 4tds^2 = 4tdx^2 + 4tdy^2$, atque $dy = \frac{\sqrt{(bdt^2 + gxds^2 - 4tdx^2)}}{2\sqrt{t}}$. Ex qua aequatione, cum t per x detur, curua quaesita AM construi poterit. Ita autem est construenda, vt posito $x = o$ fiat quoque $y = o$, quo curuae AM initium sit in A. Q. E. I.

Corollarium I.

307. Quo igitur curua sit realis, oportet, vt $bdt^2 + gxdt^2$ sit maius quam $4tdx^2$ seu $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ >

$> \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, siue integrando $\sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)}-2\sqrt{b}}{g}$. Si enim fuerit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)}-2\sqrt{b}}{g}$, curua AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

Corollarium 2.

308. Si igitur in curua AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi tangens curuae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum fit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, curua AM non eousque descendet, sed habebit punctum reuersionis in eo loco vbi tangens est verticalis.

Corollarium 3.

309. Si angulus quem curua AT in A cum verticali AP constituit fuerit acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A, $t = mx$, et $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{mdx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, vnde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper accidit si b non fuerit $= o$. Tum autem erit $dy = \frac{dx\sqrt{(bm^2+gm^2x-4mx)}}{2\sqrt{mx}}$. Posito igitur $x = o$, fiet $\frac{dy}{dx} = \infty$, seu his casibus curuae AM tangens in A erit horizontalis; nisi sit $b = o$. At si $b = o$, erit $dy = \frac{dx\sqrt{(gm-4)}}{2}$. Ne igitur curua AM fiat imaginaria, debet gm maius esse quam 4, atque tum curua AM cum AP in A angulum acutum constituet, cuius tangens erit $\frac{\sqrt{(gm-4)}}{2}$.

Corollarium 4.

310. Sin vero angulus, quem curua AT in A cum verticali AP facit, fit rectus, fit $m = \infty$. Hoc ergo casu curuae AM tangens in A semper erit horizontalis, siue b sit $= o$ siue secus.

Corollarium 5.

311. Si celeritas in A est $= o$, et in principio A curua AT confundatur cum curua, cuius aequatio est $t = \alpha x^n$, existente n numero affirmatiuo, quo crescente x quoque t crescat, erit $dt = \alpha n x^{n-1} dx$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(\alpha^2 g n^2 x^{2n-1} - 4\alpha x^n}}{2\sqrt{\alpha x^n}}$.
Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x = o$ debebit esse $n > 2n-1$, seu $n < 1$, quibus casibus scilicet curua AT in A est normalis ad AP. Tum vero erit in puncto A, $dy = \frac{n dx \sqrt{\alpha g}}{2 x^{\frac{1-n}{2}}}$ et $y = \frac{n x^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\alpha g}}{n+1}$, et radius osculi curuae AM in A $= \frac{n^2 \alpha g x^n}{2(n+1)}$. Ex quo sequitur curuae AM, cuius tangens in A est horizontalis, radium osculi in A debere esse infinite paruum, si corpus ex quiete super ea descendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite paruus, corpus perpetuo in A quiescens permanebit.

Co-

Corollarium 6.

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curua AM fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{gx}}$ saltem in initio curuae AT. Quare si ponatur $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx$, vbi p est quantitas affirmatiua saltem nisi x ponatur nimis magnum, erit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int pdx$, vbi $\int pdx$ ita accipi debet, vt euanescat facto $x = o$. Hoc autem valore loco $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ substituto prodibit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx$ seu $s = x + \int pdx\sqrt{gx}$, pro curua quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio $y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}$. Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int pdx$ praescripto modo acceptum fiat infinite magnum.

Corollarium 7.

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmatiuum retineat, tamdiu curuam AM descendere: si fit $p = o$, et deinceps negatiuum, curua AM in illo loco habebit cuspidem, et reuertetur sursum. Si $p = \infty$, manente tamen $\int pdx$ finito, curua AM ibi habebit tangentem horizontalem.

Corollarium 8.

314. Si b non ponatur $= o$, ex eadem curua AT innumerabiles inueniri poterunt curuae AM; prout enim celeritas initialis maior minorue accipiatur, alia prodit curua AM.

Scho-

Scholion.

315. Problematis huius maximus erit vsus in solutionibus sequentium problematum indeterminatorum, in quibus omnes curuae requiruntur, super quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curuam lineam perueniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius inuestigauimus, quo iis in sequentibus vti liceat.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tabula IX. Fig. 1.

316. *Posita potentia sollicitante vniformi* g *et deorsum directa, inuenire omnes curuas* AMC, *super quibus corpus in* A *ex quiete descensum incipiens dato tempore ad rectam horizontalem* BC *perueniat.*

Solutio.

Ponatur $AP = x$, $PM = y$, et $AB = a$. In curua AND exprimat PN supra sumtam quantitatem $\int pdx$, cuius curuae haec debet esse proprietas, vt in A cum axe AB concurrat, eiusque applicatae continuo vsque ad D saltem crescant, quo scilicet pdx sit affirmatiuum. Nunc sumto $y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}$ erit tempus per $AMC = \frac{2\sqrt{ga}}{g} + BD$ (312.). Quamobrem cum infinitae curuae huius indolis in locum curuae AND substitui queant, ex iis infinitae orientur curuae AMC, super quibus omnibus

bus corpus eodem tempore ex A ad lineam horizontalem BC pertingit. Ad hoc ergo obtinendum pro $\int p dx$ talis quantitas accipi debet, quae euanescat posito $x = o$, et fiat $=$ BD posito $x = a$, retinente p vbique per AND affirmatiuum valorem. Q. E. I.

Corollarium 1.

317. Si facto $x = a$ fiat $y = o$, seu si curua AND in D perpendiculariter insistat horizontali CD, curua AMC quoque horizontali DC perpendiculariter insistet.

Corollarium 2.

318. Atque si posito $x = o$, fiat quoque $p = o$, tangens curuae AMC in A erit verticalis, idem vero quoque accidit, si $p\sqrt{x}$ fiat $= o$ posito $x = o$. At si $p\sqrt{x}$ fiat infinitum posito $x = o$, curua AMC in A habebit tangentem horizontalem.

Scholion 1.

319. Intelligitur ergo problema hoc maxime esse indeterminatum, cum infinitis modis infinitae curuae AMC possint inueniri. Quamobrem in sequentibus exemplis modum indicabimus quotcunque libuerit series infinitarum curuarum quaesito satisfacientium inueniendi.

Exemplum 1.

320. Ponatur $PN = \int p\,dx = z$ et $BD = \sqrt{b}$, ita vt tempus descensus esse debeat $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Sumatur pro curua AND haec aequatio $z = \alpha x^2 + \beta x$, quae hanc iam habet proprietatem, vt $\int p\,dx$ seu z euanescat posito $x = 0$. Nunc quia facto $x = a$ fieri debet $z = \sqrt{b}$, habebitur $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \beta a$, hincque $\beta = \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$, ideoque $z = \alpha x^2 + \frac{x\sqrt{b}}{a} - \alpha a x$. Deinde quia p seu $\frac{dz}{dx}$ affirmatiuum semper habere debet valorem si $x < a$, debebit esse $2\alpha x + \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$ affirmatiuum. Quare oportet esse $\sqrt{b} > \alpha a^2$, ponatur ideo $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \alpha a f$ erit $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{a^2 + af}$. Quo substituto habebitur $z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af}$, quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affirmatiuis, infinitas dat curuas AND. Fiet autem $p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x\sqrt{b} + f\sqrt{b}}{a^2 + af}$ et $p\sqrt{gx} = \frac{2x\sqrt{gbx} + f\sqrt{gbx}}{a^2 + af}$, ex qua patet omnes hinc orientes curuas AMC tangere rectam AB in A. Aequatio vero pro curuis AMC erit haec $y = \int \frac{dx}{a^2 + af} \sqrt{(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx} + gbx(2x+f)^2)}$. Quae infinitas continet curuas problemati satisfacientes, super quibus omnibus tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$.

Corollarium 3.

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx$, erit $s = x + \int p\,dx \sqrt{gx}$.

$\sqrt{gx}$. Eſt vero $\int p\,dx\sqrt{gx} = \frac{\frac{4}{5}x^2\sqrt{gbx}+\frac{2}{3}fx\sqrt{gbx}}{a^2+af}$.
Vnde tota curua AMC erit $= a + \frac{(\frac{4}{5}a+\frac{2}{3}f)\sqrt{gab}}{a+f}$.

Corollarium 4.

322. Inter has igitur curuas AMC longiſſima prodit ſi $f=0$, erit enim tum $AMC = a + \frac{4}{5}\sqrt{gab}$. Et pro hac erit aequatio iſta $y=\int\frac{2dx}{a^2}\sqrt{(a^2x\sqrt{gbx}+gbx)}$. Breuiſſima vero habetur facto $f=\infty$, tum enim erit $AMC = a+\frac{2}{3}\sqrt{gab}$. Et aequatio pro hac curua erit $y=\int\frac{dx}{a}\sqrt{(2a\sqrt{gbx}+gbx)}$.

Scholion 2.

323. Omnes curuae AND ſub aequatione $z = \frac{x^2\sqrt{b}+fx\sqrt{b}}{a^2+af}$ contentae ſunt parabolae, adeo vt per ſolas parabolas innumerabiles inuentae ſint curuae problemati ſatisfacientes. Neque vero omnes parabolae in hac aequatione continentur, ſed loco illius aequationis, ſi adhibeatur haec, $z^2+z\sqrt{f}=\frac{x(h+\sqrt{bf})}{a}$, quae etiam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curuae AMC inuenientur, ſuper quibus corpus dato tempore deſcenſum abſoluit. Ex quo intelligi poteſt quoties infinitae inueniri queant curuae AMC, ſi tantum ſectiones conicae in locum curuae AND ſubſtituan-

ſtituantur. Sumta enim pro curua AND hac aequatione $z^2 + \alpha z = \beta x^2 + \gamma x + \gamma x + \delta x z$, quae omnes continet ſectiones conicas per punctum A transeuntes, fieri debet $b + \alpha \sqrt{b} = \beta a^2 + \gamma a + \delta a \sqrt{b}$, atque $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{2ba+\gamma+\delta\sqrt{b}}{\alpha+2\sqrt{b}-\delta a}$ debent eſſe quantitates poſitivae, quod quam infinitis modis fieri poſſit, facile perſpicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae conſiderentur, atque poſtmodum quoque curuae tranſcendentes ſimul, maxima copia curuarum ſimul deſcriptarum concipi poterit.

Exemplum 2.

324. Sumatur pro curua AND haec aequatio generalis $z = \frac{x^n \sqrt{b}}{a^n}$, denotante n numerum affirmatiuum quemcunque; euaneſcet z poſito $x = o$, fietque $z = \sqrt{b}$ poſito $x = a$ vt requiritur: praeterea vero quoque erit p ſeu $\frac{dz}{dx} = \frac{n x^{n-1} \sqrt{b}}{a^n}$ quantitas affirmatiua. Cum igitur ſit $p\sqrt{gx} = \frac{n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb}}{a^n}$ erit $y = \int \frac{dx}{a^n} \sqrt{(2 n a^n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb} + n^2 g b x^{2n-1})}$. Quae aequatio infinitas curuas AMC complectitur, quae omnes erunt rectificabiles. Erit enim $AM = x + \frac{2 n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{gb}}{(2n+1) a^n}$, ideoque $AMC = a + \frac{2n\sqrt{gab}}{2n+1}$.

Co-

Corollarium 5.

325. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{dx\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ atque $y = \frac{x\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ et $AM = x(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a})$. Quare curua abit in lineam rectam inclinatam super qua descensus fit tempore $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Perspicitur ergo dari lineas breuiores recta hac inclinata, super quibus corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC peruenit: facto enim $n < \frac{1}{2}$ linea AMC fit breuior.

Scholion 3.

326. Ceterum si detur vnica curua AND desideratam curuam AMC praebens, ex ea ipsa innumerabiles aliae poterunt inueniri. Data enim vnica aequatione inter z et x capiatur $PN = \frac{(ma - (m-1)x)z}{a}$, vnde pro diuerso ipsius m valore innumerabiles curuae orientur. Simili modo poni etiam potest $PN = \frac{(max^n - (m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}}$ fit enim $PN = z = \sqrt{b}$ si ponatur $x = a$. Atque generaliter si fuerit P functio quaecunque ipsarum x et z, A vero eadem functio quae prodit facto $x = a$ et $z = \sqrt{b}$, accipi poterit $PN = \frac{Pz}{A}$. Debebit autem P talis esse functio vt Pz euanescat facto $x = 0$ et $z = 0$, et diff. PN diuisum per dx debet esse quantitas affirmatiua, saltem quamdiu est $x < a$.

Scholion 4.

327. Simili modo problema generalissime soluetur, si designante P quamcunque functionem ipsius x euanescentem si est $x=o$, et A eam quantitatem in quam abit P si fit $x=a$, sumatur $z=\frac{P\sqrt{b}}{A}$ pro generalissima aequatione curuae AND. Sit deinde $dP=Qdx$, debebit Q esse quantitas affirmatiua, quamdiu x non superat a; erit $p=\frac{Q\sqrt{b}}{A}$ atque hinc $y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AQ\sqrt{gbx}+gbQQx)}$, quae est generalissima aequatio pro curuis AMC, quae omnes a corpore descendente proposito tempore absoluentur. Apparet hoc modo curuas transcendentes quoque in locum curuarum AND substitui posse, quibus casibus tempus, quo quaeuis curuae AMC portio absoluitur, agebraice non potest definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $=R$, erit $y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AR+RR)}$. Sumto ergo loco R quacunque functione ipsius x, ad inueniendam A integrari debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ ita vt euanescat posito $x=o$, deinde poni oportet $x=a$, et quod prouenit erit $=A$. Hic vero hoc tantum est monendum vt pro R sumatur quantitas affirmatiua, quamdiu x non excedit a, et caueri debetne $\int\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum si praescripto modo accipiatur.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tabula IX. Fig. 2.

328. *Posita potentia sollicitante uniformi* g *et vbique deorsum directa, inuenire omnes curuas* AMC *super*

super quibus corpus ex A dato tempore ad rectam BC ad horizontem vtcunque inclinatam descendat.

Solutio.

Exprimat curuae AND applicata BD tempus, quo corpus ex A ad rectam BC pertingit; et ducta per quodvis punctum M recta MQ parallela rectae datae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus, quo corpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B eandem habeant applicatam BD, hae omnes generabunt curuas AMC super quibus corpus dato tempore ab A ad rectam BC peruenit. Curuae autem AND vt supra monitum concurrere debent in A cum verticali AB, et vsque ad D diuergere debent ab AB. Ponatur nunc tangens anguli $ABC = k$, sitque $AP = x$, $PM = y$, $AQ = u$, $QN = t$, et $AP = a$ erit $PQ = \frac{y}{k}$, ideoque $x + \frac{y}{k} = u$. Quia autem celeritas in M debita est altitudini gx erit tempus per $AM = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale esse debet ipsi $QN = t$, erit adeo $dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et $gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. At ob curuam AND datam, dabitur t in u, et cum sit $u = x + \frac{y}{k}$ dabitur t per x et y quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curua quaesita AMC. Vel cum sit $y = ku - kx$, erit $gx\,dt^2 = (k^2 + 1)\,dx^2 - 2k^2\,du\,dx + k^2\,du^2$, ex qua aequatione x per u inuenire licebit. Sit ad hoc $dt = p\,du$, erit $gxp^2du^2 = (k^2 + 1)\,dx^2 - 2k^2$

dudx

$dudx + k^2 du^2$, atque $dx = \frac{k^2 du + \sqrt{(g(k^2+1)p^2 x - k^2) du^2)}}{k^2+1}$ Curua igitur AND talis accipi debet vt vbique p maius sit quam $\frac{k}{\sqrt{gx(k^2+1)}}$. Aequatio illa autem ita debet integrari vt facto $u=o$ fiat $x=o$. Quo facto quoque eruetur aequatio inter x et y pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium 1.

329. Curua AMC tanget in A rectam AB si sit $dy = o$, posito $x=o$; tum vero debebit esse $du = dx$, atque $1 = \sqrt{(g(k^2+1)p^2 x - k^2)}$. Quare hoc eueniet si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x=o$. Quia autem hoc casu est y infinities minor quam x, erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequitur curuam AMC in A tangere verticalem AB si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito $u=o$.

Corollarium 2.

330. Deinde curua AMC normalis erit in QM si fuerit $PQ = \frac{y}{k} = \frac{ydy}{dx}$ seu $dx = kdy$, $= k^2 du - k^2 dx$, siue $dx = \frac{k^2 du}{k^2+1}$. Hoc vero eueniet vbi erit $p^2 x = \frac{k}{g(k^2+1)}$.

Corollarium 3.

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum valorem eumque maiorem quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit facto $x=o$; vel infinite magnum. In posteriore casu erit $dx = \pm \infty du$, et cum sit $dx = dx$

+

$+ \frac{dy}{k}$, erit $dy = -k\,dx$. Quibus casibus tangens curuae AMC in A parallela erit rectae BC.

Exemplum.

332. Sit curua AND parabola quaecunque, ita vt sit $t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{gu}}$ erit $dt = \frac{\alpha\,du}{\sqrt{gu}}$, et $p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}}$, vnde habebitur ista aequatio, $(k^2+1)\,dx - k^2\,du = \pm \frac{du\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Huius aequationis integralis est $C = (\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)\,x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{\pi}(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)\,x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$. Existente $A = \frac{\alpha^2 + \sqrt{(\alpha^4 - 4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$ et $B = \frac{\alpha^2 - \sqrt{(\alpha^4(1-4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$ et $\pi = \frac{-2A}{A-B}$ atque $\varrho = \frac{2B}{A-B}$. Cum igitur sit π numerus negatiuus, erit $C(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{-\pi} = (\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$, vbi C denotat constantem, quae efficiat vt posito $x = o$ fiat $u = o$. Manifestum autem est quaecunque fuerit constans, semper fieri $u = o$ posito $x = o$, excepto casu quo ϱ vel π euanescit. At π euanescere non potest, ϱ vero euanescit casu quo $\alpha = 1$, hoc igitur casu debet esse $C = \infty$, fietque $\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2)} + \alpha^2\sqrt{u} = o$, seu $u = x$ et $y = o$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB. Reliquis casibus vero ob C arbitrariam quantitatem ex vnica curua AND innumerabiles curuae AMC inueniuntur. Vnicus porro casus est seorsim tractandus, si $A = B$ seu $k^2 = \frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)}$ tum enim erit $lu = C - 2\,l(r \mp \frac{\alpha}{2}^2) \pm \frac{\alpha^2}{r \pm \frac{\alpha}{2}^2}$ existente $r =$

 $\sqrt{(\alpha^2}$

$\frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Consequenter pro hoc casu habebitur haec aequatio $C = 2\, l(\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}}$, vbi C quoque determinatione non opus habet. Si est $\alpha > 1$ fit B et hinc quoque p numerus negatiuus, tum ergo debet esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel $A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$ vel $B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$. Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo inclinatis et per A transeuntibus: haeque etiam generaliter satisfaciunt. Vt si fuerit $\alpha = 1$, erit $A = 1$ et $B = o$, hincque hae aequationes $u = x$ seu $y = o$ et $u = \frac{(k^2+1)x}{kk} = x + \frac{x}{k}$ seu $x = ky$; quae est linea recta perpendicularis in BC, haec enim a corpore eodem tempore percurritur, quo verticalis BC.

Corollarium 4.

332. Nisi igitur sit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles lineae curuae inueniuntur problemati satisfacientes; quae ergo omnes minore tempore absoluentur, quam perpendicularis AB.

Corollarium 5.

333. Cum ergo ex vnica curua AND infinitae oriri queant curuae AMC, facile intelligitur infinities plures curuas huic quaestioni satisfacere, quam praecedenti.

Co-

Corollarium 6.

334. Si $a < 1$ effici poteſt determinanda conſtante C, vt curua quaeſita per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis aſſumendis curuis AND ſimili modo infinitae curuae poterunt inueniri, ſuper quibus corpus non ſolum dato tempore ad rectam BC perueniat, ſed ad quodvis in ea punctum datum C.

Scholion 1.

335. In hoc exemplo caſus quo $a = 1$ bis occurrit, prima enim vice linea recta verticalis tantum ſatisfaciens eſt inuenta, altera vice praeter hanc rectam alia inclinata, vtroque tamen modo eadem aequatione generali ſumus vſi. Saepius autem iam huiusmodi caſus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in ſe aequationes integrales, quae nihilominus per integrationes non eruuntur. Vt in caſu $a = 1$ haec habetur aequatio differentialis, $\frac{(k^2+1)dx - k^2 du}{\sqrt{((k^2+1)x - k^2 u)}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}}$ quae integrata dat $x = u$. Interim tamen perſpicuum eſt hanc aequationem $k^2 u = (k^2+1)x$ in illa quoque contineri, etiamſi per integrationem non prodeat. Et hanc ob rem poſterior aequatio integralis aeque ſatisfacit ac prior $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem $\frac{dt}{T} = V du$, in qua T eſt talis functio ipſius t, quae euaneſcat poſito $t = o$, et V functio quaecunque ipſius u, aeque comprehendere hanc in-

 tegra-

tegralem $t=o$ ac hanc $\int\frac{dt}{T} = \int V\,du$, quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t=o$, si t est simplex quantitas negligi potest, at si t est quantitas composita vt in nostro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus §. 300. in aequatione $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)}}$ vbi obseruauimus aequationem $x=a$ in ea contineri, etiamsi integratio nequidem possit perfici. Nam posito $a-x=t$ erit $-dx=dt$ et $\sqrt{(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)}$ erit functio ipsius t, quae fit $=o$ si fit $t=o$ seu $x=a$; namque $\int Pdx$ ita accipi jubebatur, vt euanescat posito $x=a$. Posita ergo hac ipsius t functione $=T$ erit $ds=\frac{dt\sqrt{b}}{T}$, ex qua aequatione ergo tuto concludi licet, satisfacere aequationem $t=o$ seu $x=a$, ideoque problemati illi satisfacere circulum, vt ibi innuimus. (303.) Magis vniuersaliter vero in hac aequatione $V\,du = \frac{dt}{T}$, si T non euanescit posito $t=o$, comprehendetur ista aequatio $T=o$, ex qua erit $t=$ constanti quantitati, ideoque $dt=o$. Vnde intelligitur $T=o$ contineri in aequatione proposita $V\,du=\frac{dt}{T}$. Atque hinc si t fuerit quantitas composita v. g. ex u et x statim habetur aequatio integralis, per integrationem vix eruenda.

Scholion 2.

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem requirit, quando recta BC supra punctum

ctum A cum BA concurrit, et quandò eſt parallela. Conſiderabimus autem ſequente problemate tantum caſum, quo ſit BC parallela verticali AB et in data diſtantia poſita; ex quo ſimili modo caſum rectae BC vtcunque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37.
Problema.

337. *Sollicitetur corpus perpetuo deorſum vi uniformi* g; *inuenire curuas innumerabiles, ſuper quibus corpus ex* A *motum a quiete incipiendo, dato tempore ad rectam verticalem* EC *perueniat.* Tab. IX. Fig. 3.

Solutio.

Sit AMC curua quaecunque quaeſitarum, et pro axe ſumatur recta verticalis AB, dicatur AP $=x$, PM$=$AQ$=y$; erit celeritas in M debita altitudini gx, et tempus per AM $=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$. Sit porro AND curua, cuius quaevis applicata QN exprimat tempus per AM, et ſit QN$=t$ functioni ipſius y, poterit ex curua AND data curua AMC inueniri. Quare ſi infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in E communem habeant applicatam DE, omnes producent curuas AMC ſuper quibus corpus dato tempore per DE expreſſo ex A ad CE perueniet. Erit itaque $t=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et poſito $dt=pdy$ erit $gp^2xdy^2=dx^2$

$+dy^2$, atque $dx = dy\sqrt{(gp^2x-1)}$. Quae ita integrata, vt posito $x=o$ fiat $y=o$, dabit curuas AMC quaesitas. Sit R functio quaecunque ipsius y et $\int R dy$ ita capiatur vt euanescat posito $y=o$. Tum fiat $\int R dy = A$ posito $y = AE = a$, et existente $DE = \sqrt{b}$ sumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int R dy}{A}$, erit $p = \frac{R\sqrt{b}}{A}$ atque $dx = \frac{dy}{A}\sqrt{(gbR^2x - A^2)}$. Quae aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curuas quaesito satisfacientes. Q. E. I.

Corollarium 1.

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R=1$, tum enim aequatio separabilis prodit. Erit vero $t = \frac{y\sqrt{b}}{a}$, ob $A=a$. Hanc ob rem fit $\frac{adx}{\sqrt{(gbx-a^2)}} = dy$, atque $\frac{2a}{gb}\sqrt{(gbx-a^2)} = y$. Qui autem nullius est vtilitatis, ob valorem ipsius y imaginarium.

Corollarium 2.

339. Quia autem $\sqrt{(gbR^2x-A^2)}$ non potest esse quantitas imaginaria, oportet sit $R^2x > \frac{A^2}{gb}$ etiamsi $x=o$. Quare R neque quantitas constans esse potest, neque functio ipsius y, quae euanescat facto $y=o$. Hanc ob rem R talis esse debet functio ipsius y, quae fiat $=\infty$, si ponatur $y=o$. Praeterea tamen eiusmodi esse debet, vt $\int R dy$ non fiat infinitum quod eueniret si esset $R=\frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

Exem-

Exemplum.

340. Ponamus ergo esse $R = \frac{1}{\sqrt{y}}$, erit $\int R\,dy = 2\sqrt{y}$ et $A = 2\sqrt{a}$. Hinc habebitur ista aequatio $2dx\sqrt{ay} = dy\sqrt{(gbx - 4ay)}$. Quae aequatio quia est homogenea ponatur $x = qy$, erit $2qdy\sqrt{a} + 2ydq\sqrt{a} = dy\sqrt{gbq - 4a)}$ seu $\frac{dq}{\sqrt{(gbq - 4a)} - 2q\sqrt{a}} = \frac{dy}{2y\sqrt{a}}$. Posito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\sqrt{(nq - 1)} = r$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{r^2 - nr + 1}$. Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n < 2$. Hoc vero casu erit integrale $ly = lC + \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}\, l(2r - n + \sqrt{(n^2 - 4)}) = \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}\, l(2r - n - \sqrt{(n^2 - 4)})$. Quae ob $r = \frac{\sqrt{(nx - y)}}{\sqrt{y}}$ abit in hanc $C(2\sqrt{(nx - y)} - (n - \sqrt{(n^2 - 4)})\sqrt{y})^{\frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}} = (2\sqrt{(nx - y)} - (n + \sqrt{(n^2 - 4)})\sqrt{y})^{\frac{n + \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}}$. Vbi pro C constantem quamcunque accipere licet, quia ipsa aequatio ita est comparata, vt posito $x = 0$ fiat $y = 0$. Per methodum autem supra traditam (335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis $2q\sqrt{a} = \sqrt{(gbq - 4a)}$ seu $2x\sqrt{a} = \sqrt{(gbxy - 4ayy)}$ vnde oritur $\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2b^2 - 64a^2)}}{8a}$, quae dat duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imaginaria. In casu quo $n = 2$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2}$ seu $ly = -2l(r - 1) + \frac{2}{r-1}$, vnde fit $ly = -2l(\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}) + 2l\sqrt{y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}} + lC$, seu $l(\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}) - lC = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}}$. Vbi etiam pro C quantitatem quamcunque accipere licet. Si $n < 2$, tum constructio curuae partim a logarithmis

mis partim a quadratura circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{(n^2-4)}$ imaginarium logarithmi inuenti imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae expressione analytica.

PROPOSITIO 38.

Problema.

Tabula IX. Fig. 4.

341. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g, *dataque sit curua quaecunque* BSC *inuenire omnes curuas* AMC, *super quibus corpus descendendo ex* A *dato tempore ad curuam* BSC *perueniat.*

Solutio.

Sit curuarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punctum M ducatur curva MQ similis curuae BSC respectu puncti fixi A. et exprimat curuae AN applicata NQ tempus per arcum AM: exponet ergo applicata BD tempus per totam curuam AMC. Quo facto poterit vicissim ex data curua AND curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae generabunt infinitas curuas AMC, super quibus omnibus corpus ex A descendendo dato tempore per BD expresso ad curuam BSC perueniat. Sit nunc $AB = a$, $BD = \sqrt{b}$, et arcui QM abscindatur arcus similis BS ex curua data BSC, erit $AQ:AB = PM : RS = AP:AR = PQ: BR$. Ponatur porro AP

AP$=x$; PM$=y$; AQ$=u$; QN$=t$; AR$=r$; RS $=s$, dabitur ob curuam BSC datam aequatio inter r et s, atque ob curuam AND datam dabitur aequatio inter t et u. At ob similitudinem erit $u : a = y : s = x : r$, vnde erit $y = \frac{us}{a}$, et $x = \frac{ur}{a}$. Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx, ex qua tempus per AM erit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale poni debet ipsi t; vnde oritur ista aequatio $gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quia autem t per u datur sit $dt = p\,du$, et p sit functio ipsius u; atque ob $dx = \frac{u\,dr + r\,du}{a}$ et $dy = \frac{u\,ds + s\,du}{a}$, transibit illa aequatio in hanc: $garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uds + sdu)^2$. At quia curua BSC datur, erit s functio ipsius r sitque $ds = q\,dr$, existente q functione ipsius r quacunque. His substitutis habebitur aequatio inter u et r ista $garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uqdr + sdu)^2$. Quae radice quadrata extracta dat $\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq \pm \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2q^2 + garup^2(1+qq))}}{u(1+qq)}$

Ex qua si aequatio inter r et u inueniatur, inde habebitur simul aequatio inter x et y pro curua quaesita. Quod autem ad curuam AND attinet, sit P functio quaecunque ipsius u, et $\int P\,du$ ita integratum vt euanescat facto $u = o$, et fiat $=$ A posito $u = a$, tum sumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int P\,du}{A}$, pro aequatione curuae AND. Erit ergo $p = \frac{P\sqrt{b}}{A}$, vbi pro P functionem quamvis ipsius u ponere licet. Q.E.I.

ceat, ea ita poterit assumi vt curua AMC ad datum punctum C curuae datae BSC dirigatur. Hocque modo infinitae curuae AMC poterunt inueniri, quae omnes in dato puncto C conueniant.

Scholion I.

346. Posuimus curuas QM similes curuae BSC vt curua ipsa in A erecta fiat infinite parua et omnia puncta curuae BSC in A conueniant, et x et y euanescant posito $u=o$. Potuissemus autem eodem modo curuas QM vel cum BSC congruentes ponere, vel discrepantes lege quacunque. Vt sit Q functio ipsius u quaecunque euanescens posito $u=o$, abeatque ea in B, facto $u=a$, curua QM ita pendere poterit a curva BSC vt sit $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Qs}{B}$: namque facto $u=a$, curua QM transibit in ipsam BSC, et in A curua in punctum transibit, nisi curua BSC in infinitum progrediatur. At etiam hoc casu pro Q talis accipi poterit functio, vt etiamsi fiat $r=\infty$, tamen Qr et Qs fiat $=o$ si $u=o$. Posito autem $dQ=\dot{V}du$, habebitur aequatio generalis sequens $Qdr(1+qq)+\dot{V}du(r+sq)=duV(\frac{gb\,BP^2Qr(1+qq)}{A^2}-(Vs-Vrq)^2)$. Quae aequatio latissime patet, et ex vnica curua AND infinite infinitas curuas AMC suggeret, quin etiam infinitas suppeditabit, quae per datum punctum C transeunt.

Scho-

Scholion 2.

347. Quantumuis generalis autem eſt haec aequatio, tamen curua QM eſt ſimilis curuae BSC, quia eſt $x:y=r:s$. Quare adhuc generalior ſolutio poterit exhiberi, in qua curuae QM vtcunque diſſimiles ponuntur curuae BSC eiusmodi tamen vt QM in BSC abeant facto $u=a$. Obtinebitur vero haec ſolutio, ſi R ſumatur functio quaecunque ipſius u euaneſcens facto $u=o$, abeatque R in D poſito $u=a$, ſitque $dR=Wdu$. Sumatur enim $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Rb}{D}$; abibit x in r et y in s ſi fiat $u=a$, atque euaneſcente u tam x quam y euaneſcent, quicquid ſit r. Hinc autem ſequens orietur aequatio generaliſſima: $dr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)+du(D^2QVr+B^2RWqs)=\pm du\surd(\frac{2BD^2bP^2Qr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{A^2}-B^2D^2(RVqr-QWs)^2)$. In hac aequatione loco dr introduci poteſt ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$, et tum habebitur aequatio inter u et x. Notandum autem eſt quia Q euaneſcit facto $u=o$, P talem eſſe debere functionem ipſius u, vt P^2Q poſito $u=o$, vel fiat quantitas finita vel infinite magna, at tamen cauendum eſt ne $\int Pdu$ debito modo ſumtum fiat infinite magnum.

Corollarium 5.

348. Aeqnatio in ſolutione inuenta fit ſeparabilis, ſi fuerit $P=\frac{1}{\surd u}$; erit $A=2\surd a$ et $p=\frac{\surd b}{2\surd au}$.

Habe-

Habebitur enim $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$ dantur enim s et q per r.

Corollarium 6.

349. Simili modo aequatio Schol. I. ſeparationem admittet, ſi fuerit $P^2Q = V^2$ ſeu $P = \frac{V}{\sqrt{Q}}$ Habebitur enim $\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gBbr(1+qq)}{AA}-(s-rq)^2)}} = \frac{V\,du}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, in qua indeterminatae u et r ſunt a ſe inuicem ſeparatae.

Exemplum 1.

350. Manente $P^2Q = V^2$ ſeu $\int P\,du = 2\sqrt{Q}$ ob $V\,du = dQ$, erit facto $u = a$; $A = 2\sqrt{B}$. Vnde fit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Habebit ergo $\int P\,du$ requiſitam proprietatem, vt evaneſcat facto $u = o$; euaneſcit enim Q. Sit nunc curua BSC circulus ſuper diametro AB deſcriptus, erit $s = \sqrt{(ar-r^2)}$, et $q = \frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$ atque $1+qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)}$, his valoribus loco s et q ſubſtitutis prodibit iſta aequatio $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(-2\sqrt{ar-rr}) \pm r\sqrt{(gbr-4r^2)})\sqrt{(ar-r^2)}}$. Quae aequa-

tio non solum indeterminatas a se inuicem habet separatas, sed etiam generaliter per logarithmos integrari potest: potest enim in aequatione $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2ar+2r^2 \pm r\sqrt{(gb-4r)(a-r)}}$ membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec $lQ = \frac{4a}{4a-gb}\, l\, \frac{2\sqrt{(a-r)}\mp\sqrt{(gb-4r)}}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{gab}}{4a-gb}\, l\, \frac{\sqrt{a(gb-4r)}+\sqrt{gb(a-r)}}{\sqrt{a(gb-4r)}-\sqrt{gb(a-r)}} + lC.$ Notari hic convenit casum quo $gb = 4a$ seu $\sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, quo tempus per quamvis curuam AMC aequale ponitur tempori descensus per rectam verticalem AB; tum enim erit $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar-r^2)\pm 2(ar-r^2)}$. Si igitur signum + valeat, erit $dr = o$, et $r =$ const. $= c$, vnde fit $s = \sqrt{(ac-c^2)}$ et $x:y = \sqrt{c} : \sqrt{(a-c)}$ seu $y\sqrt{c} = x\sqrt{(a-c)}$, quae aequatio omnes dat chordas in hoc semicirculo ex A ductas, quemadmodum iam demonstravimus tempora per singulas chordas esse inter se aequalia. Valeat signum − erit $\frac{4dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar-rr}$, atque hinc $Q^{-4} = \frac{Cr}{a-r}$, seu $\frac{r}{a-r} = \frac{C^4}{Q^4}$. Erit ergo $Q = C\sqrt{\sqrt{\frac{a-r}{r}}}$, atque ob $s = \sqrt{(ar-r^2)}$ habebitur $x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\sqrt{\frac{a-r}{r}}}$ et $y = \frac{C}{B}\sqrt{\sqrt{r(a-r)^3}}$; eliminata ergo r prodibit ista aequatio (posito $\frac{C}{B} = m$) $y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}$. Hae ergo curuae hanc habent proprietatem, vt arcus earum a semicirculo abscissae absoluantur descendendo eodem tempore, eo scilicet tempore, quo singulae semicirculi chordae percurruntur.

Co-

Corollarium 7.

351. Huius autem curuae cuius aequatio est $y^2 + x^2 = m d \sqrt{xy}$ figura est AMFA; habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum semirectum constituentem et in A nodum. At vero omnes hae curuae sunt inter se similes, et omnes ad omnes circulos accommodari possunt.

Tabula IX. Fig. 5.

Corollarium 8.

352. Si ergo in hac curua sumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus transiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli, seu quo chordam AM. Quare haec curua hanc habet proprietatem, vt quivis arcus AM a corpore ex A descendente absolvatur eodem tempore, quo subtensa AM.

Corollarium 9.

353. Hoc ergo casu quo $P^2Q = V^2$ perinde est sive sit $Q = u$ sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y. Vti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur.

Tabula IX. Fig. 4.

Exemplum 2.

354. Manente $P^2Q = V^2$, vt sit $\frac{dQ}{Q} =$

dr

$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)\cdot(s\cdot rq)^2)}}$, sit curua BSC circulus centro A radio AB$=a$ descriptus, erit $s=\sqrt{(a^2-r^2)}$ et $q=\frac{-a}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ atque $1+qq=\frac{a^2}{a^2-r^2}$. Quibus substitutis prodibit sequens aequatio, $\frac{dQ}{Q}=\frac{+adr}{\sqrt{(\frac{gbr}{4}-a^2)(a^2-r^2)}}$ vbi gb maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a. Hinc statim ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo $\frac{gbr}{4}=a^2$ seu $r=\frac{4a^2}{gb}$, quo casu erit $s=\frac{a\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{gb}$. Vnde erit $x:y=4a:\sqrt{(g^2b^2-15a^2)}$ et $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{4}$ quae est tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad peripheriam peruenit, cum verticali AB. Curuae praeterea algebraicae non dantur, quia formula differentialis non effici potest rationalis.

Exemplum 3.

355. Sumta aequatione generalissima ex §. (347.) et ponatur linea BSC recta horizontalis fiet $r=a$ et $dr=o$. Hanc ob rem loco dr introducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, vbi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q euanescunt, proueniet ista aequatio: ABRds+ABW$sdu=\pm Ddu\sqrt{(gBab\,P^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae aequatio ob $Wdu=dR$ et P, Q, et V data per integrationem admittit. Erit nempe $\frac{ABRs}{D}=$ C$\pm$

$C \pm \int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$. Ex qua aequatione ergo inuenitur s. Deinde cum fit $y = \frac{Rs}{D}$, at y euanefcere debeat facto $u = o$, debebit effe $C = o$, fi quidem integrale $\int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$ ita fumatur vt euanefcat pofito $u = o$. Tum ergo erit $x = \frac{Qs}{B}$ et $y = \frac{\pm 1}{AB} \int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$. Quae eft aequatio generalis pro omnibus curuis fuper quibus corpus ex A ad horizontalem datam defcendit.

Exemplum 4.

356. Teneatur aequatio generaliffima fupra inuenta (347), et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipfi AB et ad diftantiam f ab ea pofita erit $s = f$ et $q = o$. Quare habebitur ifta aequatio $ADQdr + ADrdQ = \pm du \sqrt{(gBD^2bP^2Qr - A^2B^2f^2W^2)}$. Cum autem fit $Qr = Bx$ hoc fubftituto prodibit $ADdx = \pm du \sqrt{(gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)}$, vnde inuento x erit $y = \frac{fR}{D}$. At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non funt a fe inuicem feparatae, non multum ex ea deriuare licet.

Scholion 3.

357. Ex generali huius problematis folutione, quando vnica curua AND infinitas dat curuas AMC, colligere licet folutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curuae, fuper

quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum peruenit. Quaelibet enim curua AND vnam dabit curuam per datum punctum curuae BSC transeuntem; hocque modo innumerabiles huiusmodi curuae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre conuenit. Modus autem, quo vtemur ita est comparatus, vt vnam curuam jam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curua quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur vt ex §. 350, vbi curua per quodvis punctum semicirculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tabula X. Fig. 1.

358. *Sollicitetur corpus perpetuò deorsum vi uniformi* g, *dataque sit curua* AMC *super qua corpus ex* A *ad punctum datum* C *peruenit, inuenire omnes curuas* ANC *super quibus corpus eodem tempore ad punctum* C *ex* A *descendit.*

Solutio.

Sumta verticali AB pro axe omnium curuarum sit curuae datae AMC abscissa AP$=t$, applicata PM$=u$; sitque curua ANC vna quaesitarum: capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore absol-

abſoluatur, quo arcus AM, jungantur puncta M et N recta MN, et conſtruatur curua ALB talis, vt applicata PL aequalis ſit rectae MN. Haec ergo curua ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A, punctum N quoque in A incidet, et poſito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur. Intelligitur autem ex curua ALB inveniri poſſe curvam ANC; quare ſi infinitae huiusmodi curuae ALB concipiantur, in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curuam ANC, hocque modo innumerabiles prodibunt curuae ANC quaeſito ſatisfacientes. Sit nunc PL $=r$, erit r functio quaedam ipſius AP $=t$; curuae autem ANC ponatur abſciſſa AQ $=x$, et QN $=y$. His poſitis erit MN $=\sqrt{((x-t)^2+(u-y)^2)}=r$, ideoque $y=u\pm\sqrt{(r^2-(x-t)^2)}$. Porro quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit $\int\frac{\sqrt{(dx^2+du^2)}}{\sqrt{gt}}=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ ſeu $xdt^2+xdu^2=tdx^2+tdy^2$. Eſt autem $dy=du\pm\frac{(rdr-xdx+tdx+xdt-tdt)}{\sqrt{(r^2-(x-t)^2)}}$. Sit $du=pdt$ et $dr=qdt$, erunt r, p, et q functiones ipſius t: ponatur porro breuitatis gratia $x-t=z$ ſeu $x=t+z$, erit $dy=pdt\pm\frac{qrdt\mp zdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}$, et $dy^2+dx^2=p^2dt^2+dt^2+2dtdz+dz^2\pm\frac{2pqrdt^2\mp 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}+\frac{q^2r^2dt^2-2qrzdtdz+z^2dz^2}{r^2-z^2}$, Hinc obtinetur iſta aequatio $\frac{tr^2dz^2}{r^2-z^2}=\frac{2tqrzdtdz-tq^2r^2dt^2}{r^2-z^2}\pm\frac{2pztdtdz\mp 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2-z^2)}}-2tdtdz+zdt^2+zp^2dt^2$ ex qua

z ex t determinetur, habebitur aequatio inter x et y. Quo autem appareat cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, vt r euanescat, tam posito $t=o$ quam $t=AB=a$, sit P functio quaecunque ipsius t euanescens posito $t=o$, et Q sit etiam talis functio euanescens posito $t=o$, abeat vero Q in A si fiat $t=a$; poterit ergo poni $r = P(A-Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curuis quaesitis. Q. E. I.

Scholion I.

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inuenta ad absurdum deducere debet, vt si curua data AMC fuerit linea breuissimi descensus, quo casu non dari potest alia curua, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conueniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare, eaque problemata resoluere, in quibus inter omnes curuas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absoluatur. Atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit inuenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita. Etiamsi enim difficillimum sit omnes lineas idem descen-

descenſus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet poteſt inueniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus poſſidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus iſoperimetricorum, quam vt paſſim expoſitam hic non explicabimus.

Scholion 2.

Tabula IX. Fig. 4.

360. Huius autem problematis ſolutio per (348) ſequenti modo habetur: erat ibi $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\surd(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}$. Sit punctum C ad quod omnes curuae conuenire debent, ponaturque AE$=f$ et EC$=b$, ſi ergo ſit $r=f$, fieri debet $s=b$. Ad hoc ſit S functio quaecunque ipſius r, quae abeat in F poſito $r=f$, quo facto ponatur $s=\frac{Sb}{F}$. Subſtituatur hic valor in ſuperiore aequatione, eaque ita integretur vt poſito $u=a$ fiat $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curuae quaeſitae AMC nempe AP$=x$ et PM$=y$, ex eo quod eſt $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{us}{a}$. Atque arbitrarius valor ipſius S dabit infinitas curuas AMC puncta A et C iungentes, et ſuper quibus corpus deſcendens tempore dato $=\surd b$ perueniet ex A ad C. Sit autem $dS = Tdr$, erit $q = \frac{bT}{F}$, atque $\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+b^2T^2)}{-F^2r-b^2ST\pm\surd(\frac{gF^2br}{4}(F^2+b^2T^2)-(FbS-FbTr)^2)}$ ſeu

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + b^2T^2)}{-F^2r - b^2ST \pm F\sqrt{(\frac{gbr}{u}(F^2 + b^2T^2) - (bS - bTr)^2)}}$$

Quae aequatio ita integretur, vt posito $u = a$ fiat $r = f$; quo facto ponatur $x = \frac{ur}{a}$ et $y = \frac{bSu}{Fa}$, atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis curAMC quaesito satisfacientibus.

PROPOSITIO 40.

Problema.

Tabula X. Fig. 2.

361. *Inuenire legem generalem, secundum quam curua disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perueniat ad quoduis curuae punctum.*

Solutio.

Sit AMC curua huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breuiore perueniat, quam super quavis alia curua per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque M et μ, curua inter ea intercepta ita debet esse comparata, vt corpus in motu suo per AMC, arcum inter M et μ interceptum breuiore tempore absoluat quam quemuis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima iuncta duobus elementis $Mm\mu$, et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum; seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequali tempori per elementa proxima $Mn\mu$. Ducantur ad axem

axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$, fumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter fe aequalibus, feu quoque MG$=m$H, et pm fi opus eft ad n producta, erit mn infinite paruum refpectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo effe $t.\, Mm + t.\, m\mu = t.\, Mn + t.\, n\mu$. Sit celeritas quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm, quam Mn percurret. Celeritas autem quam in m habebit debita fit altitudini $v+du$, et celeritas, quam in n habebit debita fit altitudini $v+du+ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ifta aequatio, $\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}}$, eft vero $\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} \frac{-ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$, vnde ductis centris M et μ arculis mg et nb, erit $\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mb}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu\, ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du)}}$. Porro quia eft $\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}}$ et $\frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}$. Quibus, neglectis negligendis, fubftitutis oritur $2v(mb-ng) = mb.\, du - n\mu.\, ddw = mb.\, du - Mm.\, ddw$. Eft vero propter triangula fimilia nmg, mMG et nmb, μmH vt fequitur $ng : mn = m\text{G} : m\text{M}$, feu $ng = \frac{m\text{G}.\, mn}{\text{M}m}$ et $mb : mn = \mu\text{H} : m\mu$, feu $mb = \frac{\mu\text{H}.\, mn}{m\mu}$. Quamobrem erit $2v(\frac{m\text{H}}{m\mu} - \frac{m\text{G}}{\text{M}m}) = \frac{m\text{G}.\, du}{\text{M}m} - \frac{\text{M}m\, ddw}{mn} = 2v \text{ diff. } \frac{m\text{G}}{\text{M}m}$. Quae aequatio eft homogenea et determinat naturam curuae AMC brachyftochronae vocatae

catae, super qua corpus tempore breuissimo ex A ad C peruenit. Q. E. I.

Corollarium 1.

362. Si ergo dicatur $MG = mH = dx$, $mG = dy$, et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $H\mu = dy + ddy$ et $m\mu = ds + dds$. His substitutis habebitur $2vd\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v, du, et ddw, habebitur aequatio pro curua brachystochrona. At semper ddw ita inuoluet mn, vt mn ex calculo excedat.

Corollarium 2.

363. Sit radius osculi curuae $Mm\mu = r$ isque in plagam auersam ab axe AP directus erit $r = \frac{ds^3}{dxddy}$, at est $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2ddy}{ds^3}$. Quare erit $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}$, hinc prodibit ista aequatio $\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curua in M secundum normalem ad curuam premitur.

Corollarium 3.

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat $dw = Pdx + Qdy + Rds$; erit $du = Pdx + Qdy + Rds$ et $ddw = Q.mn + R.ng$, quia puncto m in n translato crescit dy particula mn et ds particula

la ng. Quia autem eſt $ng = \frac{dy.mn}{ds}$, erit $\frac{ddw}{mn} = -Q + \frac{Rdy}{ds}$, quibus ſubſtitutis habebitur iſta aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$.

Scholion I.

365. Ex ſolutione intelligitur formulam inventam latiſſime patere, atque ad potentias ſollicitantes quaſcunque extendi, etiam reſiſtentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae ſollicitantes, determinari poteſt tam du quam ddw, qui valores ſubſtituti dabunt aequationem pro brachyſtochrona quaeſita. Attamen haec tantum locum habent, ſi potentiarum directiones ſint in eodem plano: curua enim inuenta eſt in eodem plano ſita. Nihilo tamen minus ſi potentiae non fuerint in eodem plano, curua brachyſtochrona in dato plano ope formulae huius poterit inueniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curua brachyſtochrona quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes. Alia vero quaeſtio eſt, ſi quaeratur linea brachyſtochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta jungentes, etiam non in vno plano ſitas. Quoties vero potentiarum ſollicitantium directiones in eodem plano ſunt poſitae, dubium non eſt lineam brachyſtochronam in eodem poſitam eſſe plano. Nam ſi curuae non eſſent in eodem plano potentiae oblique agerent, et propterea corpus non tantum, quantum fieri poteſt, accelerarent. Ex hac

Scholion 2.

347. Quantumuis generalis autem eſt haec aequatio, tamen curua QM eſt ſimilis curuae BSC, quia eſt $x : y = r : s$. Quare adhuc generalior ſolutio poterit exhiberi, in qua curuae QM vtcunque diſſimiles ponuntur curuae BSC eiusmodi tamen vt QM in BSC abeant facto $u = a$. Obtinebitur vero haec ſolutio, ſi R ſumatur functio quaecunque ipſius u euaneſcens facto $u = o$, abeatque R in D poſito $u = a$, ſitque $dR = Wdu$. Sumatur enim $x = \frac{Qr}{B}$ et $y = \frac{Rb}{D}$; abibit x in r et y in s ſi fiat $u = a$, atque euaneſcente u tam x quam y euaneſcent, quicquid ſit r. Hinc autem ſequens orietur aequatio generaliſſima: $dr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2) + du(D^2QVr + B^2RWqs) = \pm du\sqrt{(\frac{4BD^2bP^2Qr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2)}{A^2} - B^2D^2(RVqr - QWs)^2)}$. In hac aequatione loco dr introduci poteſt ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$, et tum habebitur aequatio inter u et x. Notandum autem eſt quia Q euaneſcit facto $u = o$, P talem eſſe debere functionem ipſius u, vt P^2Q poſito $u = o$, vel fiat quantitas finita vel infinite magna, at tamen cauendum eſt ne $\int Pdu$ debito modo ſumtum fiat infinite magnum.

Corollarium 5.

348. Aequatio in ſolutione inuenta fit ſeparabilis, ſi fuerit $P = \frac{1}{\sqrt{u}}$; erit $A = 2\sqrt{a}$ et $p = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$.

Habe-

Habebitur enim $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$ dantur enim s et q per r.

Corollarium 6.

349. Simili modo aequatio Schol. I. feparationem admittet, fi fuerit $P^2Q = V^2$ feu $P = \frac{V}{\sqrt{Q}}$ Habebitur enim $\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gBbr(1+qq)}{AA}-(s-rq)^2)}} = \frac{V\,du}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, in qua indeterminatae u et r funt a fe inuicem feparatae.

Exemplum I.

350. Manente $P^2Q = V^2$ feu $\int P\,du = 2\sqrt{Q}$ ob $V\,du = dQ$, erit facto $u = a$; $A = 2\sqrt{B}$. Vnde fit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Habebit ergo $\int P\,du$ requifitam proprietatem, vt euanefcat facto $u = o$; euanefcit enim Q. Sit nunc curua BSC circulus fuper diametro AB defcriptus, erit $s = \sqrt{(ar-r^2)}$, et $q = \frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$ atque $1+qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)}$, his valoribus loco s et q fubftitutis prodibit ifta aequatio $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(-2\sqrt{ar-rr}) \pm r\sqrt{(gbr-4r^2)})\sqrt{(ar-r^2)}}$. Quae aequa-

Corollarium 7.

351. Huius autem curuae cuius aequatio est $y^2 + x^2 = m\, dV\, xy$ figura est AMFA; habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum semirectum constituentem et in A nodum. At vero omnes hae curuae sunt inter se similes, et omnes ad omnes circulos accommodari possunt.

Tabula IX. Fig. 5.

Corollarium 8.

352. Si ergo in hac curua sumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus transiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli, seu quo chordam AM. Quare haec curua hanc habet proprietatem, vt quivis arcus AM a corpore ex A descendente absolvatur eodem tempore, quo subtensa AM.

Corollarium 9.

353. Hoc ergo casu quo $P^2Q = V^2$ perinde est sive sit $Q = u$ sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y. Vti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur.

Tabula IX. Fig. 4.

Exemplum 2.

354. Manente $P^2Q = V^2$, vt fit $\frac{dQ}{dr} =$

$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$, ſit curua BSC circulus centro A radio AB$=a$ deſcriptus, erit $s=\sqrt{(a^2-r^2)}$ et $q=\frac{-a}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ atque $1+qq=\frac{a^2}{a^2-r^2}$. Quibus ſubſtitutis prodibit ſequens aequatio, $\frac{dQ}{Q}=\frac{+adr}{\sqrt{(\frac{gbr}{4}-a^2)(a^2-r^2)}}$ vbi gb maius eſſe debet quam $4a$, quia r non excedere poteſt a. Hinc ſtatim ille radius innoteſcit, qui quaeſito ſatisfacit, ponendo $\frac{gbr}{4}=a^2$ ſeu $r=\frac{4a^2}{gb}$, quo caſu erit $s=\frac{a\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{gb}$. Vnde erit $x:y=4a:\sqrt{(g^2b^2-15a^2)}$ et $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{4}$ quae eſt tangens anguli illius radii, ſuper quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad peripheriam peruenit, cum verticali AB. Curuae praeterea algebraicae non dantur, quia formula differentialis non effici poteſt rationalis.

Exemplum 3.

355. Sumta aequatione generaliſſima ex §. (347.) et ponatur linea BSC recta horizontalis fiet $r=a$ et $dr=0$. Hanc ob rem loco dr introducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, vbi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q euaneſcunt, proueniet iſta aequatio: $ABRds+ABWsdu=\pm Ddu\sqrt{(gBab\,P^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae aequatio ob $Wdu=dR$ et P, Q, et V data per integrationem admittit. Erit nempe $\frac{ABRs}{D}=$ C$\pm$

$C \pm \int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$. Ex qua aequatione ergo inuenitur s. Deinde cum sit $y = \frac{Rs}{D}$, at y euanescere debeat facto $u = o$, debebit esse $C = o$, si quidem integrale $\int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$ ita sumatur vt euanescat posito $u = o$. Tum ergo erit $x = \frac{Qa}{B}$ et $y = \frac{\pm 1}{AB} \int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$. Quae est aequatio generalis pro omnibus curuis super quibus corpus ex A ad horizontalem datam descendit.

Exemplum 4.

356. Teneatur aequatio generalissima supra inuenta (347), et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantiam f ab ea posita erit $s = f$ et $q = o$. Quare habebitur ista aequatio $ADQdr + ADrdQ = \pm du \sqrt{(gBD^2bP^2Qr - A^2B^2f^2W^2)}$. Cum autem sit $Qr = Bx$ hoc substituto prodibit $ADdx = \pm du \sqrt{(gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)}$, vnde inuento x erit $y = \frac{fR}{D}$. At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a se inuicem separatae, non multum ex ea deriuare licet.

Scholion 3.

357. Ex generali huius problematis solutione, quando vnica curua AND infinitas dat curuas AMC, colligere licet solutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curuae, super

quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum peruenit. Quaelibet enim curua AND vnam dabit curuam per datum punctum curuae BSC transeuntem; hocque modo innumerabiles huiusmodi curuae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre conuenit. Modus autem, quo vtemur ita est comparatus, vt vnam curuam jam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curua quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur vt ex §. 350, vbi curua per quodvis punctum semicieculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tabula X. Fig. 1.

358. *Sollicitetur corpus perpetuò deorsum vi vniformi* g, *dataque sit curua* AMC *super qua corpus ex* A *ad punctum datum* C *peruenit, inuenire omnes curuas* ANC *super quibus corpus eodem tempore ad punctum* C *ex* A *descendit.*

Solutio.

Sumta verticali AB pro axe omnium curuarum sit curuae datae AMC abscissa $AP = t$, applicata $PM = u$; sitque curua ANC vna quaesitarum: capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore absol-

absoluatur, quo arcus AM, jungantur puncta M et N recta MN, et construatur curua ALB talis, vt applicata PL aequalis sit rectae MN. Haec ergo curua ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A, punctum N quoque in A incidet, et posito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur. Intelligitur autem ex curua ALB inveniri posse curvam ANC; quare si infinitae huiusmodi curuae ALB concipiantur, in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curuam ANC, hocque modo innumerabiles prodibunt curuae ANC quaesito satisfacientes. Sit nunc $PL = r$, erit r functio quaedam ipsius $AP = t$; curuae autem ANC ponitur abscissa $AQ = x$, et $QN = y$. His positis erit $MN = \sqrt{((x-t)^2 + (u-y)^2)} = r$, ideoque $y = u \pm \sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}$. Porro quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + du^2)}}{\sqrt{gt}} = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ seu $x\,dt^2 + x\,du^2 = t\,dx^2 + t\,dy^2$. Est autem $dy = du \pm \frac{(rdr - xdx + tdx + xdt - tdt)}{\sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}}$. Sit $du = p\,dt$ et $dr = q\,dt$, erunt r, p, et q functiones ipsius t: ponatur porro breuitatis gratia $x - t = z$ seu $x = t + z$, erit $dy = p\,dt \pm \frac{qr\,dt \mp z\,dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$, et $dy^2 + dx^2 = p^2 dt^2 + dt^2 + 2\,dt\,dz + dz^2 \pm \frac{2pqr\,dt^2 \mp 2pz\,dt\,dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} + \frac{q^2 r^2 dt^2 - 2qrz\,dt\,dz + z^2 dz^2}{r^2 - z^2}$, Hinc obtinetur ista aequatio $\frac{t r^2 dz^2}{r^2 - z^2} = \frac{2tqrz\,dt\,dz - tq^2 r^2 dt^2}{r^2 - z^2} \pm \frac{2pzt\,dt\,dz \mp 2pqtr\,dt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - 2t\,dt\,dz + z\,dt^2 + zp^2\,dt^2$ ex qua

z ex t determinetur, habebitur aequatio inter x et y. Quo autem appareat cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, vt r euanescat, tam posito $t = o$ quam $t = AB = a$, sit P functio quaecunque ipsius t euanescens posito $t = o$, et Q sit etiam talis functio euanescens posito $t = o$, abeat vero Q in A si fiat $t = a$; poterit ergo poni $r = P(A - Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curuis quaesitis. Q. E. I.

Scholion I.

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inuenta ad absurdum deducere debet, vt si curua data AMC fuerit linea breuissimi descensus, quo casu non dari potest alia curua, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conueniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare, eaque problemata resoluere, in quibus inter omnes curuas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absoluatur. Atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit inuenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita. Etiamsi enim difficillimum sit omnes lineas idem descen-

descensus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet potest inueniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus isoperimetricorum, quam vt passim expositam hic non explicabimus.

Scholion 2.

360. Huius autem problematis solutio per (348) sequenti modo habetur: erat ibi $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Sit punctum C ad quod omnes curuae conuenire debent, ponaturque $AE=f$ et $EC=b$, si ergo fit $r=f$, fieri debet $s=b$. Ad hoc sit S functio quaecunque ipsius r, quae abeat in F posito $r=f$, quo facto ponatur $s=\frac{Sb}{F}$. Substituatur hic valor in superiore aequatione, eaque ita integretur vt posito $u=a$ fiat $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curuae quaesitae AMC nempe $AP=x$ et $PM=y$, ex eo quod est $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{us}{a}$. Atque arbitrarius valor ipsius S dabit infinitas curuas AMC puncta A et C iungentes, et super quibus corpus descendens tempore dato $=\sqrt{b}$ perueniet ex A ad C. Sit autem $dS = Tdr$, erit $q = \frac{bT}{F}$, atque $\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+b^2T^2)}{-F^2r-b^2ST \pm \sqrt{(\frac{gF^2br}{4}(F^2+b^2T^2)-(FbS-FbTr)^2)}}$ seu

Tabula IX. Fig. 4.

$\frac{du}{u} =$

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + b^2T^2)}{-F^2r - b^2ST \pm F\sqrt{(\frac{gbr}{u}(F^2 + b^2T^2) - (bS - bTr)^2)}}$$

Quae aequatio ita integretur, vt posito $u = a$ fiat $r = f$; quo facto ponatur $x = \frac{ur}{a}$ et $y = \frac{bSu}{Fa}$, atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis curAMC quaesito satisfacientibus.

PROPOSITIO 40.

Problema.

Tabula X. Fig. 2.

361. *Inuenire legem generalem, secundum quam curua disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perueniat ad quoduis curuae punctum.*

Solutio.

Sit AMC curua huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breuiore perueniat, quam super quavis alia curua per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque M et μ, curua inter ea intercepta ita debet esse comparata, vt corpus in motu suo per AMC, arcum inter M et μ interceptum breuiore tempore absoluat quam quemuis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima juncta duobus elementis $Mm\mu$, et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum; seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequali tempori per elementa proxima $Mn\mu$. Ducantur ad axem

axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$, fumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter fe aequalibus, feu quoque MG$=m$H, et pm fi opus eft ad n producta, erit mn infinite paruum refpectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo effe $t.\,Mm + t.\,m\mu = t.\,Mn + t.\,n\mu$. Sit celeritas quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm, quam Mn percurret. Celeritas autem quam in m habebit debita fit altitudini $v+du$, et celeritas, quam in n habebit debita fit altitudini $v+du+ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ifta aequatio, $\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}}$, eft vero $\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} \frac{-ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$, vnde ductis centris M et μ arculis mg et nb, erit $\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mb}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu\, ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du)}}$. Porro quia eft $\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}}$ et $\frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}$. Quibus, neglectis negligendis, fubftitutis oritur $2v(mb-ng) = mb.\,du - n\mu.\,ddw = mb.\,du - Mm.\,ddw$. Eft vero propter triangula fimilia nmg, mMG et nmb, μmH vt fequitur $ng : mn = m\text{G} : m\text{M}$, feu $ng = \frac{m\text{G}.\,mn}{\text{M}m}$ et $mb : mn = \mu\text{H} : m\mu$, feu $mb = \frac{\mu\text{H}.\,mn}{m\mu}$. Quamobrem erit $2v(\frac{m\text{H}}{m\mu} - \frac{m\text{G}}{\text{M}m}) = \frac{m\text{G}.\,du}{\text{M}m} - \frac{\text{M}m\, ddw.}{mn} = 2v\,\text{diff.}\,\frac{m\text{G}}{\text{M}m}$. Quae aequatio eft homogenea et determinat naturam curuae AMC brachyftochronae vo-

catae

catae, ſuper qua corpus tempore breuiſſimo ex A ad C peruenit. Q. E. I.

Corollarium 1.

362. Si ergo dicatur $MG = mH = dx$, $mG = dy$, et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $H\mu = dy + ddy$ et $m\mu = ds + dds$. His ſubſtitutis habebitur $2vd\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. In qua ſi ex potentiis ſollicitantibus determinentur v, du, et ddw, habebitur aequatio pro curua brachyſtochrona. At ſemper ddw ita inuoluet mn, vt mn ex calculo excedat.

Corollarium 2.

363. Sit radius oſculi curuae $Mm\mu = r$ isque in plagam auerſam ab axe AP directus erit $r = \frac{ds^3}{dxddy}$, at eſt $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2ddy}{ds^3}$. Quare erit $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}$, hinc prodibit iſta aequatio $\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. Ubi notandum eſt eſſe $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curua in M ſecundum normalem ad curuam premitur.

Corollarium 3.

364. Si ex potentiis ſollicitantibus fluat $dw = Pdx + Qdy + Rds$; erit $du = Pdx + Qdy + Rds$ et $ddw = Q.mn + R.ng$, quia puncto m in n tranſlato creſcit dy particula mn et ds particu-

la

la ng. Quia autem eſt $ng = \frac{dy.mn}{ds}$, erit $\frac{ddw}{mn} = -Q - \frac{Rdy}{ds}$, quibus ſubſtitutis habebitur iſta aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$.

Scholion I.

365. Ex ſolutione intelligitur formulam inventam latiſſime patere, atque ad potentias ſollicitantes quaſcunque extendi, etiam reſiſtentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae ſollicitantes, determinari poteſt tam du quam ddw, qui valores ſubſtituti dabunt aequationem pro brachyſtochrona quaeſita. Attamen haec tantum locum habent, ſi potentiarum directiones ſint in eodem plano: curua enim inuenta eſt in eodem plano ſita. Nihilo tamen minus ſi potentiae non fuerint in eodem plano, curua brachyſtochrona in dato plano ope formulae huius poterit inueniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curua brachyſtochrona quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes. Alia vero quaeſtio eſt, ſi quaeratur linea brachyſtochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta iungentes, etiam non in vno plano ſitas. Quoties vero potentiarum ſollicitantium directiones in eodem plano ſunt poſitae, dubium non eſt lineam brachyſtochronam in eodem poſitam eſſe plano. Nam ſi curuae non eſſent in eodem plano potentiae oblique agerent, et propterea corpus non tantum, quantum fieri poteſt, accelerarent. Ex hac

igitur solutione tam linea absolute brachystochrona, si potentiarum sollicitantium directiones sunt in eodem plano, inuenitur, quam linea, quae in dato plano est brachystochrona, quaecunque fuerint potentiae sollicitantes.

Scholion 2.

366. Quaestionem hanc de linea brachystochrona seu celerrimi descensus primus produxit Cel. Ioh. Bernoulli, atque plures eius solutiones extant tam in Act. Lips. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Paris. et alibi vbi hoc problema tam in hypothesi potentiae sollicitantis deorsum directae, quam pro viribus centripetis solutum dederunt. Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemisit, vt ad potentias quascunque et resistentiam etiam extendi posset. Sumserunt enim omnes $ddw = o$, quod semper perperam fit, nisi directio potentiae sit MG vel mH. Et hanc ob rem Cel. Hermannus cespitauit, dum tali propositione ad brachystochronas in medio resistente inueniendas est vsus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727; quasque correctas dedi in iisdem Comm. A. 1734. ex hoc ipso problemate.

PROPOSITIO 41.

Problema.

Tabula X. Fig. 2.

367. *Si corpus perpetuo deorsum trahatur vi qua-*

quacunque; inuenire lineam brachyſtochronam AMC *ſuper qua corpus citiſſime ex* A *ad* C *deſcendit.*

Solutio.

Poſita AP$=x$; PM$=y$; et arcu AM$=s$, ſit vis quae corpus in M deorſum vrget $=$P; erit $v=\int Pdx$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $x=o$, ſi quidem corpus motum in A ex quiete inchoare ponitur: atque $dv=Pdx$. Erit ergo $du=Pdx=dv$ et $ddw=o$, quia dx inuariatum manet, eunte m in n. Quocirca habebitur iſta aequatio $2v.\,d.\frac{dy}{ds}=\frac{dydv}{ds}$, cuius integralis eſt $l\frac{v}{a}=2\,l\frac{dy}{ds}$ ſeu $vds^2=ady^2$, hincque $dx^2\int Pdx$ $=ay^2-dy^2\int Pdx$. Quamobrem pro linea brachyſtochrona quaeſita habebitur iſta aequatio dy $=\frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$, in qua indeterminatae x et y ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Curuae autem longitudo habetur ex hac aequatione $ds=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$. Q.E.I.

Corollarium 1.

368. In A igitur vbi celeritas corporis euaneſcit ſeu fit $\int Pdx=o$, erit $dy=o$ ſeu tangens curuae in A erit verticalis incidens in AP. At vbi fit $\int Pdx$ $=a$, ibi tangens curuae erit horizontalis.

Corollarium 2.

369. Quia $ddw=o$, et $du=Pdx$, erit $\frac{2v}{r}=$ $\frac{Pdy}{ds}$. (363) Eſt vero $\frac{Pdy}{ds}$ vis normalis, qua cur-

va in M ſecundum normalem verſus axem AP ductam premitur. Conſequenter vis normalis eſt aequalis vi centrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachyſtochrona hanc habet proprietatem, vt tota preſſio, qua curua premitur, ſit duplo maior quamvis normalis ſola. In ſequentibus vero demonſtrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachyſtochronis ſive in vacuo ſiue in medio reſiſtente locum habere.

Corollarium 3.

370. Propter arbitrariam a dantur infinitae curuae brachyſtochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici poteſt, vt curva ex A per datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, ſuper qua tempus eſt minimum.

Corollarium 4.

371. Quia curua AMC alicubi habet tangentem horizontalem, ſit ea BC et in C ſumatur alius axis verticalis CQ. Sit $CQ = X$, $QM = Y$ et $CM = S$, erit $dX = -dx$, $dY = -dy$ et $dS = -ds$; atque $\int P dx = a - \int P dX$ integrali $\int P dX$ ita accepto vt evaneſcat poſito $X = o$. Ad hunc ergo axem CQ ſi curua referatur, habebitur iſta aequatio $dY = \frac{dX\sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}}$ ſeu $dS = \frac{dX\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}$.

Tabula X. Fig. 3.

Corollarium 5.

372. Hae ergo omnes curuae ad vtramque partem axis CQ duos arcus habent ſimiles et aequales.

les. Simili modo ad vtramque partem axis AB curua aequaliter eſt diſpoſita. Quamobrem huiusmodi curuae infinitas diametros habebunt inter ſe parallelas, et ad diſtantiam BC poſitas; niſi forte potentia ſollicitans ita accipiatur, vt ſupra A ſit negatiua, quo caſu curua CMA ſurſum tendere poterit et partem concavam deorſum convertere.

Exemplum I.

373. Sit potentia ſollicitans vniformis ſeu $P = g$, erit $\int P dx = gx$; vnde loco a poſito gb pro brachyſtochrona in hac potentiae ſollicitantis hypotheſi habebitur iſta aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}$ ſeu $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$. At ſi aequatio ad axem CQ referatur erit $dY = \frac{dX\sqrt{(b-X)}}{\sqrt{X}}$ et $dS = \frac{dX\sqrt{b}}{\sqrt{X}}$ cuius integralis eſt $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet curuam eſſe cycloidem ſuper baſi horizontali a circulo diametri b deſcriptam et deorſum conuerſam: quemadmodum hoc a Cel. Ioh. Bernoulli aliisque eximiis Geometris jam pridem eſt inuentum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, linea ſuper qua corpus ex A citiſſime ad M deſcendit, inuenitur ſi deſcribatur cyclois cuſpidem in A, et baſem horizontalem habens, atque per punctum M tranſiens; id quod ex eo, quod omnes cycloides ſunt curuae ſimiles, ex vnica deſcripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad M pertingit, quodque eſt minimum, erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{g(bx-x^2)}}$,

et curuae AM longitudo erit $=\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}=2b-2\sqrt{b}$ $(b-x)$. Cum autem sit $PM=y=\int\frac{xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; erit tempus per AM $=\frac{2y+2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}}=$ arcui in circulo diametri b cuius sinus versus est $=x$ ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

Exemplum 2.

374. Si potentia sollicitans P fuerit vt potestas quaecunque abscissae CQ, nempe $P=\frac{X^n}{f^n}$ erit $\int PdX=\frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Consequenter curua brachystochrona AMC exprimetur hac aequatione $dY=\frac{dX\sqrt{((n+1)af^n-X^{n+1})}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$ seu $dS=$ $\frac{dX\sqrt{(n+1)af^n}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$, ita vt sit $S=\frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n}\sqrt{(n+1)af^n}$. Quare si fuerit vel $n=1$ vel $n>1$ curua CM erit infinite magna, seu ipsa recta BC. Cuspis autem curuae A seu locus in quo motus incipit habetur sumendo $CQ=BA=\sqrt[n+1]{(n+1)af^n}$. Curuae prodibunt algebraicae si fuerit $n=\frac{1-2m}{1+2m}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum quemcunque. His igitur casibus erit n numerus negatiuus, vnitate minor, ita tamen vt $n+1$ sit numerus affirmatiuus. Sit $m=1$, erit $n=-\frac{1}{3}$. Quare fiet dY $=\frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}$

$=\frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}\sqrt{(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}}-X^{\frac{2}{3}})}$, cuius integralis eſt $Y = \frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3}f} - (\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}}-X^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}})$. Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis ſexti. Simili modo aliae curuae algebraicae inuenientur, quae in certis hypotheſibus ſunt brachyſtochronae.

Scholion I.

375. Ex data problematis ſolutione ſequitur ſimul ſolutio problematis inuerſi, quo quaeritur potentia ſollicitans deorſum directa, talis vt data curua ſit brachyſtochrona. Debet autem haec curua in puncto infimo C habere tangentem horizontalem, et alicubi in A vbi eſt motus initium, tangentem verticalem. Vt ſi fuerit aequatio pro curua data haec $dY=RdX$, erit $R^2\int PdX = a - \int PdX$ atque $\int PdX = \frac{a}{R^2+1}$. Vnde inuenitur $P = \frac{-2aRdR}{(R^2+1)^2dX} = \frac{-2adXdYddY}{ds^4}$. Si ergo radius oſculi in M ponatur r, propter $r=\frac{ds^3}{-dXddY}$ habebitur $P = \frac{2adY}{rds}$. Quare problema hac vnica ſoluetur analogia: vt radius oſculi curuae in M ad lineam datam; ita ſinus anguli, quem tangens curuae in M cum verticali facit, ad potentiam ſollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritati, quam corpus in M habet, eſt $a-\int PdX = \frac{aR^2}{R^2+1} = \frac{adY^2}{ds^2}$, ex quo ſequitur celeritatem corporis eſſe illi ipſi ſinui anguli, quem tangens curuae cum

verti-

verticali conſtituit, proportionalem. Vt ſi ſit curva CMA circulus radio c deſcriptus; erit $r = c$ et $dY = \frac{c\,dX - X\,dX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$ atque $dS = \frac{c\,dX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$, ex quibus fit $P = \frac{2a(c - X)}{c^2} = \frac{2a\,AP}{cc}$. Vis ergo corpus deorſum trahens proportionalis eſſe debet abſciſſae AP, cui etiam celeritas eſt proportionalis.

Scholion 2.

376. Inuenta linea brachyſtochrona pro hypotheſi potentiae ſollicitantis deorſum tendentis, ordo requireret, vt lineas brachyſtochronas in hypotheſi virium centripetarum determinaremus. At propoſitio fundamentalis (361.) ita eſt comparata, vt elementa curuae Mm et $m\mu$ ad axem AP et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad caſum virium centripetarum non commode quadrat. Videtur quidem elementa MG et mH vt conuergentia ad centrum virium conſiderari poſſe; ſed hic ipſe error, qui ex hoc oritur, quod elementa MG et mH non eſſent parallela, vt propoſitio fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perſpicuum hoc reddi poteſt determinando radio oſculi, qui ſi MG et mH fuerint inter ſe parallela eſt $= \text{MG} : d.\frac{mG}{Mm}$, quae autem expreſſio non locum habet, ſi MG et mH ad centrum virium convergunt. Quare antequam ad brachyſtochronas in hypotheſi virium centripetarum accedamus, ex propoſitione fundamentali

Tabula X. Fig. 2.

tali

tali generalem deriuabimus proprietatem cuicunque potentiarum sollicitantium hypothesi accommodatam. Ex quibus perspicietur Cel. Hermannum in Phoronomia aliosque, qui brachystochronas pro viribus centripetis dederunt, esse deceptos, dum vsi sunt principio cum veritate non consentaneo, vt mox indicabitur.

PROPOSITIO 42.

Theorema.

377. *Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea linea erit brachystochrona, quam corpus super ea motum premit vi duplo maiore, quam est vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis.* Tabula X. Fig. 2.

Demonstratio.

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes in binas resolui possunt, quarum altera trahat secundum MG altera secundum MP. Sit illa secundum MG trahens $= P$ et quae secundum MP trahit $= Q$, et dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$; itemque altitudo celeritati in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis $= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. Hanc ob rem erit $dv = Pdx - Qdy$. Cum hac expressione comparetur, quod supra (364.) est allatum, vbi posuimus $dv = Pdx +$

 Qdy

$Qdy + Rds$, erit Q negatiuum et $R = o$. Sequitur ergo exinde fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. At est $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, qua curua in M premitur et $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$ est vis normalis. Quare cum vis centrifuga sit aequalis vi normali, tota pressio, quam curua sustinet duplo maior est quam vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis. Q. E. I.

Scholion I.

378. In sequente capite demonstrabimus hanc eandem propositionem locum etiam habere in medio quocunque resistente; id quod quidem eadem opera hic demonstrare potuissemus: sed quia resistentiae sequens caput est destinatum, eo potius hoc theorema transferre visum est.

Corollarium I.

379. Ex hac igitur propositione facile erit in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi brachystochronas determinare. Hocque ipsum jam ex aliqua parte supra praestitimus, vbi curuas determinauimus, in quibus pressio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

Corollarium 2.

380. Cum sit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Qdy$ his integralibus ita accipiendis, vt euanescant

nescant factis x et $y = o$, si quidem motus in A ex quiete incipere debet.

Corollarium 3.

381. Si ergo hic pro v inuentus valor substituatur habebitur aequatio pro curua brachystochrona haec $\frac{2\int P dx - 2\int Q dy}{r} = \frac{P dy + Q dx}{ds}$. Est vero $r = \frac{ds^3}{dx ddy}$ (363.) sumto dx pro constante, quia in partem oppositam axi AP cadere r ponitur; vnde habetur haec aequatio: $\frac{2 dx ddy}{ds^2}(\int P dx - \int Q dy) = P dy + Q dx$.

Corollarium 4.

382. Quia haec aequatio est differentialis secundi gradus atque ideo duplicem integrationem requirit, altera integratione constans quaevis poterit adiici, altera effici debet, vt facto $x = o$ fiat quoque $y = o$. Infinitae ergo prodeunt curuae brachystochronae pro eadem potentiarum sollicitantium hypothesi. Atque constante arbitraria effici poterit, vt curua per datum punctum transeat.

Corollarium 5.

383. Tempus, quo corpus ex A ad M peruenit, est $= \int \frac{ds}{\sqrt{(\int P dx - Q dy)}} = \int \sqrt{\frac{2 dx ddy}{P dy + Q dx}}$, quae quidem expressio prius ex aequatione curuae est in-

vestiganda; minimum vero hoc tempus esse debet inter omnia alia tempora motuum per curvas omnes puncta A et M jungentes.

Scholion 2.

384. Quemadmodum porro in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi eae curuae libere describuntur, in quibus vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali; ita eae curuae erunt brachystochronae, in quibus vis normalis quoque aequalis est vi centrifugae, sed in eandem plagam tendens. Atque quemadmodum illa proprietas communis est omnium curuarum libere descriptarum etiam in medio resistente, ita haec quoque proprietas ad omnes lineas brachystochronas in medio resistente extenditur.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tabula X. Fig. 4.

385. *Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium* C: *inuenire lineam brachystochronam* AM, *super qua corpus ex* A *citissime ad* M *pertingat.*

Solutio.

A puncto A, in quo motus initium ponitur, ad centrum virium C ducatur recta AC, item

MC

MC, et in tangentem MT ex C perpendiculum CT. Ponantur $AC = a$; $CM = y$; $CT = p$; vis centripeta in $M = P$ et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit $dv = -Pdy$ et $v = -\int Pdy$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $y = a$. Vis normalis autem erit $= \frac{Pp}{y}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga et in eandem plagam tendens; tum enim proueniet curua brachystochrona, vt Prop. praec. demonstrauimus. Curua igitur debebit esse conuexa versus centrum C et radius osculi in partem auersam a centro C cadet. Quare cum haec expressio $\frac{ydy}{dp}$ exhibeat radium osculi, quatenus versus centrum cadit, erit vera radii osculi expressio in nostro casu $\frac{-ydy}{dp}$. Vis igitur centrifuga erit $= \frac{-2vdp}{ydy} = \frac{2dp\int Pdy}{ydy}$, cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur haec aequatio $\frac{2dp}{p} = \frac{Pdy}{\int Pdy}$ cuius integralis est $\frac{pp}{b} = -\int Pdy$, seu $p = \sqrt{-b\int Pdy}$; quae est aequatio pro curua quaesita inter y et p. At si centro C ducatur arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit $nm = \frac{yds}{a}$ et $pp = \frac{y^4ds^2}{a^2dy^2+y^2ds^2}$. Hinc fiet $ds = \frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, atque valore ipsius p ex superiore aequatione substituto habebitur $ds = \frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2+b\int Pdy)}}$, quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a descriptum, qui metitur angulum ACM, ex qua fluit constructio curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

386. Quia altitudo celeritati debita est $v = -\int Pdy = \frac{pp}{b}$; celeritas corporis in quovis loco erit vt perpendiculum ex C in tangentem demissum: simili modo, quo in motu libero celeritas est huic perpendiculo reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

387. Sit radius osculi in $M = r$, erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ex conditione problematis. Hinc ergo habebitur $r = \frac{2vy}{Pp} = \frac{2py}{bP}$. Quia autem in initio curuae in A est $p = o$ seu AC tangens curuae, erit radius osculi quoque in $A = o$, nisi forte simul P vis centripeta in A euanescat.

Corollarium 3.

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco vbi $dp = o$, ibi autem ex aequatione pro curua fit $dy = o$. Quare in eo loco corpus celerrime mouetur vbi recta CM in curuam est normalis. Curua ergo vltra hoc punctum a centro C recedit.

Scholion 1.

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis non est proportionalis sinui anguli, quem tangens curuae cum directione vis centripetae constituit; huius enim anguli TMC sinus

finus eft $\frac{p}{y}$, celeritas vero ipfi p inuenta eft proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, fi centrum virium infinite diftat et directiones vis follicitantis funt inter fe parallelae, vt ex Prop. 41. intelligitur, vbi celeritas erat vt $\frac{dy}{ds}$ i. e. vt finus ang. quem elementum curuae cum directione potentiae follicitantis conftituit. Hanc autem proprietatem Cel. Hermannus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727. omnibus brachyftochronis tam in vacuo, quam in medio refiftente communem effe eft arbitratus. Atque hanc ob rem non folum eae lineae, quas in medio refiftente pro brachyftochronis dedit, tales non funt, fed etiam quas in vacuo pro viribus centripetis invenit. Hoc autem cafu inuenit hanc aequationem $-\frac{\int P dy}{b} = \frac{p^2}{y^2}$ a noftra atque vera aequatione prorfus difcrepantem.

Exemplum I.

890. Sit vis centripeta ipfis diftantiis corporis a centro proportionalis, fiet $P = \frac{y}{f}$. Quare erit $\int P dy = \frac{y^2 - a^2}{2f}$ atque $v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}$. Quae eft aequatio pro brachyftochrona in hac vis centripetae hypothefi, inter p et y. Altera vero aequatio inter arcum s radio a defcriptum, qui eft menfura anguli ACM, et y eft haec $ds = \frac{-a dy \sqrt{b(a^2 - y^2)}}{y\sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2 b)}}$. Huius curuae punctum infimum feu centro proximum habetur ponendo vel $dy = o$ vel

vel $p=y$, tum autem erit $y=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$, haec ergo est minima curuae a centro C distantia. Radius osculi huius curuae in quovis puncto est $=\frac{2py}{bP}=\sqrt{\frac{2f(a^2-y^2)}{b}}$. In puncto ergo centro proximo radius osculi est maximus quippe $=\frac{2af}{\sqrt{b(b+2f)}}$. Ponatur tangens anguli $ACM=t$ posito sinu toto $=1$, erit $\frac{ds}{a}=\frac{dt}{1+tt}$; ponatur porro $\frac{\sqrt{b(a^2-y^2)}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}=q$, habebitur ista aequatio $\frac{dt}{1+tt}=\frac{dq}{1+qq}-\frac{dq}{1+\frac{(b+2f)}{b}qq}$ Ex quo intelligitur curuam toties esse algebraicam quoties est $\frac{b}{b+2f}$ numerus quadratus. Longitudo curuae AM est porro generaliter $=$ $\int\frac{-ydy}{\sqrt{(y^2+b\int Pdy)}}$; hoc ergo casu erit $AM=\int\frac{-ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}$ $=\frac{2af-\sqrt{2f(2fyy+byy-a^2b)}}{2f+b}$. Ex qua aequatione sequitur curuam brachystochronam AM esse hypocycloidem, quae generatur rotatione circuli cuius diameter est $=\frac{a\sqrt{(b+2f)}-a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$ super concava parte peripheriae AE centro C radio AC descriptae. Cum igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides super peripheria AE natas esse brachystochronas.

Exemplum 2.

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum, vt sit $P=\frac{f^2}{y^2}$, vnde erit $\int Pdy=\frac{-f^2}{y}+\frac{f^2}{a}=\frac{f^2(y-a)}{ay}$, atque $v=\frac{f^2(a-y)}{ay}=\frac{p^2}{b}$.

$\frac{f^2}{b}$, quae eſt aequatio pro brachyſtochrona in hac vis centripetae hypotheſi. Altera vero aequatio inter arcum s et y erit iſta $ds = \frac{-ady\sqrt{bf^2(a-y)}}{y\sqrt{(ay^3+bf^2y-abf^2)}}$. Huius ergo curuae punctum infimum poſito $dy = 0$, determinabitur ope huius aequationis cubicae $ay^3 + bf^2y = abf^2$. Ceterum iſta aequatio inter s et y ſufficit ad curuam quaeſitam conſtruendam.

Scholion 2.

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propoſitionibus allata ſunt, intelligitur quomodo in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi ea linea ſit inuenienda, ſuper qua corpus ex dato puncto ad datum punctum citiſſime perueniat. Nunc ergo etiam determinari oportet eam lineam, ſuper qua corpus a dato puncto citiſſime non ad datum punctum ſed ad datam lineam perueniat, quae ſane curua vna erit ex infinitis brachyſtochronis: at quaenam ea ſit in ſequente Propoſitione declarabimus.

PROPOSITIO 44.

Theorema.

393. *Corpus a dato puncto* A *ad quamuis lineam datam* BM *celerrime peruenit ſuper linea brachyſtochrona* AM, *quae datae lineae* BM *ad angulos rectos occurrit: hocque in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi.* Tabula X. Fig. 5.

Demonſtratio.

Sit AM ea linea, ſuper qua corpus ex A citiſſime ad lineam BM perueniat; perſpicuum eſt primo hanc lineam fore brachyſtochronam: nam ſi daretur linea, ſuper qua corpus citius ab A ad M perueniret, ea potius quaeſito ſatisfaceret. Praeterea haec linea AM ad angulos rectos in M curuae BM occurrit; niſi enim ad angulos rectos occurreret, ducta minima normali mn, ob $mn < mM$ corpus citius per Amn ad curuam BM perveniret, quam per AmM. Quare ne haec exceptio locum inuenire poſſit, neceſſe eſt, vt curua AM datae curuae normaliter inſiſtat. Conſequenter corpus ſuper ea infinitarum brachyſtochronarum ex A ad curuam BM ductarum citiſſime ad curuam BM peruenit, quae curuae BM ad angulos rectos occurrit. Q. E. I.

Corollarium 1.

394. Si ergo infinitae curuae quaerantur, ſuper quibus corpus dato tempore ab A ad lineam BM perueniat; oportet vt datum tempus ſit maius quam tempus per brachyſtochronam AM: alias enim problema fieret impoſſibile.

Coollarium 2.

395. Si accidat vt plures curuae brachyſtochronae ſint normales in curuam BM, plura quoque

que prodibunt tempora minima vel maxima. Haec enim methodus tam minima quam maxima declarat.

Corollarium 3.

396. Quia tempus per curuam brachystochronam AM est minimum, intelligitur ex methodo maximorum et minimorum, si duae brachystochronae proximae concipiantur normaliter insistentes curuae BM, tempora per eas esse inter se aequalia.

Corollarium 4.

397. Hinc porro perspicitur, si curua BM fuerit eiusmodi, vt omnes brachystochronas ex puncto A ductas secet ad angulos rectos, tempora per omnes brachystochronas ad curuam B M vsque ductas fore inter se aequalia.

Corollarium 5.

398. Quamobrem curua quae ab omnibus curuis brachystochronis ex puncto A ductis arcus isochronos, seu eodem tempore percursos abscindit, ea quoque omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit, seu erit illarum traiectoria orthogonalis.

Corollarium 6.

399. Atque vicissim quoque perspicitur, si curua, quae ab infinitis curuis arcus isochronos

abſcindit, fuerit earum traiectoria orthogonalis; eas infinitas curuas omnes eſſe brachyſtochronas.

Scholion.

400. Facile intelligitur hanc propoſitionem locum quoque habere in medio reſiſtente; ſimili enim modo apparet tempus per elementum *mn* normale in curuam BM minus eſſe quam tempus per elementum *m*M quod non eſt perpendiculare; in hoc autem totius demonſtrationis vis eſt ſita. Quare ſi, infinitis curuis ex puncto A eductis, lex potentiarum ſollicitantium et reſiſtentiae poterit inueniri, in qua eae curuae omnes ſint brachyſtochronae, ſimul harum curuarum traiectoria orthogonalis poterit exhiberi quaerendo tantum curuam ab iis curuis arcus iſochronos abſcindentem. Atque hanc ipſam traiectorias orthogonales inueniendi methodum jam adhibuit Cel. Ioh. Bernoulli, in Act. Lipſ. A. 1697.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tabula X. Fig. 6.

401. *Inter omnes curuas puncta* A *et* C *jungentes et aequaliter longas eam determinare* AMC *ſuper qua corpus celerrime ex* A *ad* C *perueniat, in hypotheſi potentiae ſollicitantis uniformis* g *et deorſum directae.*

So-

Solutio.

Ducta verticali AP et horizontali PM dicatur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$; eritque tempus quo arcus AM absoluitur $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Iam per methodum isoperimetricorum, de qua peculiarem dedi dissertationem cum formulis generalibus, ex quibus quaeuis problemata facile resolui possunt, in Comment. Acad. Petr. A. 1733; duae quantitates considerandae sunt arcus $AM = s = \int ds$ et tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius respectu debet esse minima vel maxima. Eodem enim redit siue inter omnes curuas aeque longas quaeratur ea, quae breuissimum habeat descensum, siue inter omnes, super quibus descensus fiunt eodem tempore ea, quae est breuissima. Per formulas autem meas dat $\int ds$, hanc quantitatem *diff.* $\frac{dy}{ds}$ et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat *diff.* $\frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius multiplo cuicunque aequalis est ponenda. Habetur ergo integrando $\frac{dy}{ds} = \frac{dy\sqrt{a}}{ds\sqrt{x}} - m$, seu $dy(\sqrt{a} - \sqrt{x}) = mds\sqrt{x}$. Sumendis vero quadratis erit $dy^2(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = m^2xdx^2 + m^2xdy^2$, vnde erit $dy = \frac{mdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a - 2\sqrt{ax} + (1-m^2)x)}}$ et $ds = \frac{dx(\sqrt{a} - \sqrt{x})}{\sqrt{(a - 2\sqrt{ax} + (1-m^2)x)}}$. Ex quo curua quaesita determinabitur. Q. E. I.

Corollarium I.

402. In aequatione inuenta duae insunt quantitates a et m arbitrariae, quibus effici potest vt curua per datum punctum C transeat, et vt simul sit

datae longitudinis. Atque tum haec curua celerrime absoluetur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis per A et C transeuntes.

Corollarium 2.

403. Si ponantur a et m infinite magna prodibit cyclois, quae non solum inter omnes curuas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino citissime absoluitur.

Corollarium 3.

404. Si ponatur $m = o$ prodit $dy = o$; seu recta verticalis. At si fiat $a = o$, oritur recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linea inter omnes lineas, quae eodem tempore absoluuntur minima seu breuissima.

Corollarium 4.

405. Si ponatur $m = 1$, prodibit curua algebraica, erit enim $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}$, cuius integralis est $y = \frac{-(4a+4\sqrt{ax}+6x)\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{15\sqrt{a}} + \frac{4a}{15}$. Haec curua etiam est rectificabilis, namque erit $s = \frac{2a}{5} - \frac{(2a+2\sqrt{ax}-2x)}{5\sqrt{a}}\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}$. Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi, erit enim $\int\frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{a}}{3} - \frac{(4\sqrt{a}-2\sqrt{x})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{5\sqrt{a}}$. Aequatio vero pro curua reducta fit ordinis quinti.

Co-

Corollarium 5.

406. Si in hac curua ſumatur $x = \frac{a}{4}$, ibi tangens erit horizontalis, atque recta verticalis in eo curuae puncto erit diameter curuae. Illo autem loco fit $y = \frac{4a}{15}$, et longitudo curuae ad hoc punctum erit $= \frac{2a}{5}$. Atque tempus, quo hic arcus abſoluitur eſt $= \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{g}}$. Eodem ergo tempore corpus recta deſcendet per altitudinem $\frac{4}{9}a$.

Scholion.

407. Miſſis nunc hiſce de celerrimo deſcenſu progredimur ad eas curuas conſiderandas, ſuper quibus plures deſcenſus inter ſe comparati datam teneant relationem. Huc maxime pertinet quaeſtio de curuis tautochronis, ſuper quibus vel omnes deſcenſus ad punctum infimum curuae vsque fiunt eodem tempore, vel integrae oſcillationes. Ad haec deinde aliae accedere poſſunt quaeſtiones cum difficiles, tum vim methodi, qua vtemur, illuſtrantes.

PROPOSITIO 46.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1.

408. *Inuenire legem generalem curuarum tautochronarum, ſuper quibus omnes deſcenſus ad punctum A, initio deſcenſus vbicunque in curua* AM *accepto, abſoluantur eodem tempore.*

So-

Solutio.

Sumta recta AP pro axe, dicatur curuae portio AM$=s$, fitque altitudo celeritati in A debita $=b$, et altitudo celeritati in M debita $=v$; erit tempus quo arcus AM abfoluitur $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$, quod integrale ita eft capiendum, vt euanefcat pofito $s=o$. Tum fi in eo integrali ponatur $v=o$, habebitur tempus defcenfus a loco in quo celeritas erat nulla vsque ad punctum A, feu totum defcenfus tempus; id quod eadem quantitate expreffum effe debet, quaecunque fuerit quantitas b. Haec igitur quantitas b neque in expreffione temporis ineffe debet, neque in expreffione pro curva AM, quia haec eadem curua idem defcenfus tempus producere debet, vtcunque varietur b. Sit jam v quantitas compofita ex litera z ad curuam pertinente, et a curua AM cum abfciffa AP et applicata PM tantum pendente, neque b inuolvente; atque ex littera b quae ex b et quantitatibus conftantibus fit compofita. Sit autem v talis ipfarum b et z functio vt euanefcat, pofito $z=b$, atque vt fiat $=b$, fi fit $z=ab$, exiftente a numero quocunque. Ponatur porro $ds=pdz$ pro aequatione curuae quaefitae, debebit p talis effe quantitas, in qua non contineatur b vel b, quia hae litterae in aequationem curuae ingredi nequeunt. Habebimus ergo pro expreffione temporis per AM, $\int\frac{pdz}{\sqrt{v}}$ hoc integrali ita accepto vt euanefcat pofito $v=b$ feu $z=ab$. Deinde hoc integrale fi in eo po-

ponatur $z = b$ dabit tempus totius descensus, in quo b inesse non poterit. Hoc vero euenit si $\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipsarum b et z nullius dimensionis, seu si $\frac{pz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis. Sit v functio m dimensionum ipsarum b et, z, debebit esse $p = C z^{\frac{m-2}{2}}$, denotante C quantitatem constantem a b non pendentem. Quoties ergo pro v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $ds = C z^{\frac{m-2}{2}} dz$, seu $s = \frac{2 C z^{\frac{m}{2}}}{m} +$ const. si opus est, quo s euanescat, si in z euanescat vel x vel y. Q. E. I.

Corollarium 1.

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi, oportet vt v quantitatibus finitis sit expressum: atque vt ea expressio transmutari possit in functionem homogeneam ex b et z constantem.

Corollarium 2.

410. Hanc ob rem necesse est vt fiat $v = b$, si ponatur $z = ab$; quo in quantitate constante adiecta etiam non reperiatur b. Sufficit igitur si viderimus fieri $v = b$, facto $z = ab$ neque opus est, vt integratio absoluatur.

Corollarium 3.

411. Intelligitur etiam curuam in A habere debere tangentem normalem in directionem vis

ſollicitantis; niſi enim hoc fuerit, tempus per arcum deſcenſus infinite paruum, foret quoque infinite paruum.

Scholion.

412. Valet haec ſolutio non ſolum ſi, vti figura indicat, curua exponatur per coordinatas orthogonales; nihil enim intereſt quibusnam quantitatibus naturam curuae exponere velimus; dummodo in z non ingrediatur b. Poteſt autem z continere lineas et quantitates quascunque a curva pendentes. Hac igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi, lineae tautochronae poterunt inueniri, quia ſemper celeritas per quantitates finitas exprimi poteſt. At ſi, vt in mediis reſiſtentibus fieri ſolet, celeritas non poteſt exhiberi finitis quantitatibus; haec methodus vſum habere nequit; ſed alia deſideratur, quae ſuccedit, etiam ſi celeritas per aequationem differentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1.

413. *Si corpus deorſum ſollicitetur vi quacunque; inuenire lineam tautochronam, ſuper qua omnes deſcenſus fiant eodem tempore.*

Solutio.

Poſito $AP=x$, $PM=y$; et $AM=s$, ſit celeritas in A debita altitudini b; et in M debita altitu-

titudini v. Sit porro vis ſollicitans in M$=$P, erit $v=b-\int Pdx$ integrali $\int Pdx$ ita accepto vt euaneſcat facto $x=o$. Iam ſi ponatur $b=b$ et $\int Pdx = z$, erit v functio vnius dimenſionis ipſarum b et z, et euaneſcit facto $z=b$, fitque $v=b$ facto $z=o$. Erit igitur $m=1$, ideoque habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $ds=\frac{Cdz}{\sqrt{z}}$ et $s=2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int Pdx}$. Si deſideretur aequatio inter x et y, erit ob $ds=\frac{aPdx}{\sqrt{a\int Pdx}}$, $dy=\frac{dx\sqrt{(aP^2-\int Pdx)}}{\sqrt{\int Pdx}}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

414. Quia euaneſcit $\int Pdx$ facto $x=o$; tangens curuae in A erit horizontalis, niſi in A euaneſcat P. Atque curua alicubi habebit tangentem verticalem, ibique plerumque cuſpidem, hoc euenit vbi erit $\int Pdx = aP^2$. Ibi enim fit $dy=o$.

Corollarium 2.

415. Huius curuae in puncto infimo A radius oſculi eſt aequalis ſubnormali $=\frac{ydy}{dx}=\frac{sds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius oſculi $=2aP$, vbi P denotat potentiam ſollicitantem in puncto A.

Corollarium 3.

416. Ex radio oſculi in A et potentia ſollicitante in A inuenitur tempus aſcenſus vel de-

ſcenſus per infinite paruum arcum $= \frac{\pi\sqrt{4aP}}{2\sqrt{P}}$ (172) $= \pi\sqrt{a}$. Huicque tempori tempus cuiusque deſcenſus eſt aequale. In hypotheſi ergo grauitatis $= 1$, pendulum longitudinis $2a$ deſcenſus infinite paruos eodem tempore abſoluet.

Exemplum 1.

417. Sit potentia ſollicitans vbique conſtans, nempe $P = g$, erit $\int P dx = gx$ atque $s = 2\sqrt{gax}$, itemque $dy = \frac{dx\sqrt{(ga - x)}}{\sqrt{x}}$, vnde intelligitur curuam eſſe cycloidem deorſum convexam, prorſus cum linea brachyſtochrona in eadem potentiae hypotheſi congruentem. Quod autem omnes deſcenſus fiant eodem tempore ſuper cycloide jam ſupra demonſtrauimus (187).

Exemplum 2.

418. Sit potentia ſollicitans vt poteſtas quaecunque ipſius x, erit $P = \frac{x^n}{f^n}$ et $\int P dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n}$ ſi quidem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus; ſin enim eſſet $n+1$ numerus negatiuus, fieret $\int P dx = \infty$. Erit igitur $s = \frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{a}{n+1}}$ atque $dy = \frac{dx\sqrt{((n+1)ax^{n-1} - f^n)}}{\sqrt{f^n}}$. Ex qua aequatione intelligitur curuam fore rectam vtcunque inclinatam ad ho-

horizontem, si fuerit $n=1$. At si $n>1$ curua in initio A fit imaginaria, quo vsque nimirum f^n incipit minus esse quam $(n+1)\,ax^{n-1}$.

Scholion 1.

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diametrum curuae. Quare cum in vacuo ascensus sint similes descensibus, semioscillationes omnes super curua MA ad alteram partem vsque producta erunt quoque isochronae, et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde cum ob arbitrariam a infinitae sint curuae tautochronae AM, duae quaeque in puncto A coniunctae, vt ibi habeant tangentem communem horizontalem, producent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas; si scilicet pendulum ita accommodetur vt oscillando huiusmodi curuas absoluat.

Scholion 2.

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curuas, quas inuenimus, esse solas, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z substitui nequit, vt in integrali, si ponatur $v=0$, prorsus ex formula exeant b seu b. Id quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inuentae, non satis liquet.

Scholion 3.

421. Quia est $s=2\sqrt{a\int P\,dx}$, erit $P=\frac{s\,ds}{2a\,dx}$. Ex quo apparet, cuiusmodi esse debeat potentia

 sol-

follicitans, vt data curua fit tautochrona. Scilicet potentia deorsum tendens debet esse proportionalis ipsi $\frac{sds}{d\alpha}$ ex data curua desumto. Quare nisi curua sit rectificabilis, valor potentiae sollicitantis non potest algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48.

Problema.

Tabula XI. Fig. 2.

422. *Si corpus perpetuo trahatur ad centrum virium* C *vi quacunque: inuenire lineam tautochronam* BMA, *super qua corpus omnes descensus ad punctum* A *usque eodem tempore absoluat.*

Solutio.

Dicatur $CA = c$, $CM = y$, et vis centripeta in M corpus sollicitans $= P$. Sit porro celeritas in debita altitudini b et ea in M altitudini v. Sumatur $\int P dy$ ita vt euanescat posito $y = c$, quo facto erit $v = b - \int P dy$. Sumtis ergo b pro b et $\int P dy$ pro z, erit functio ipsarum b et z, cui v aequatur, vnius dimensionis, quare erit $m = 1$. Si nunc arcus A M dicatur $= s$, erit $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int P dy}$, atque hinc $ds = \frac{a P dy}{\sqrt{a\int P dy}}$. Si nunc in M ducatur tangens in eamque ex centro C demittatur perpendiculum CT, quod dicatur p, erit $\frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}} = ds$. Quare habebitur $y^2\int P dy = (y^2 - p^2)\, aP^2$ seu $p^2 = y^2 - \frac{y^2\int P dy}{aP^2}$, aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

423. In puncto A vbi $\int Pdy$ euanescit, erit $p = y$, seu recta CA erit normalis in curuam, in eoque propterea celeritas corporis erit maxima, quia A est punctum curuae centro C proximum.

Corollarium 2.

424. Si ponatur $p = o$, habebitur punctum curuae B; in quo recta CB curuam tangit. In eoque puncto, quod erit supremum, curua cuspidem habebit. Inuenitur vero punctum B ex hac aequatione $aP^2 = \int Pdy$; atque y non poterit esse maior, quam valor ex hac aequatione inuentus.

Corollarium 3.

425. Apparet etiam ex aequatione inuenta $s = 2\sqrt{a\int Pdy}$, quia signum radicale signum ambiguum inuoluit, curuam duos habere ramos AB et AD inter se similes et aequales; et hanc ob rem oscillationes, quae super curua BAD fiunt, esse inter se aequales.

Corollarium 4.

426. Radius osculi in puncto A est $= \frac{2acP}{c-2aP}$. Et quia est $AC = c$, erit tempus, quo vnus descensus super curuae AB portione infinite parua absoluitur $= \pi\sqrt{a}$ (207.), huic igitur tempori omnes descensus erunt aequales. Hanc ob rem oscillatio-

lationes, quae fiunt super curua BAD isochronae erunt cum oscillationibus penduli in grauitatis hypothesi, cuius longitudo est $= 2a$.

Exemplum I.

427. Sit vis centripeta directe proportionalis distantiis a centro vt sit $P = \frac{y}{f}$, erit $\int P dy = \frac{y^2-c^2}{2f}$. Hinc ergo erit $AM = s = \sqrt{\frac{2a(y^2-c^2)}{f}}$, atque $p^2 = yy - \frac{f(yy-cc)}{2a}$. Huius curuae radius osculi in puncto M, qui est $\frac{y\,dy}{dp}$, inuenitur $= \frac{2a}{2a-f}\sqrt{(2a-f)y^2+c^2})$. Ex quo sequitur si fuerit $2a > f$ curuam versus centrum C fore conuexam vt exhibet figura. At si fuerit $2a = f$, curua euadet linea recta in A normalis ad rectam AC. Punctum autem B vbi CB tangit curuam inuenitur ex hac aequatione $(f-2a)yy = ccf$, ex qua fit $BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}$. Quoties ergo accidit vt sit $f > 2a$ seu curua conuexa versus C, habebit curua cuspidem in B. Atque in his casibus curua erit hypocyclois, quae generatur rotatione circuli, cuius diameter est $= \frac{c\sqrt{f} - c\sqrt{(f-2a)}}{\sqrt{(f-2a)}}$, super concaua parte circuli centro C radio $= \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}$ descripti. Hoc ergo casu curuae tautochronae conueniunt cum brachystochronis supra inuentis (390). At si $2a > f$ quo casu curua est concaua versus C, fit BC imaginaria et curua AM non amplius est hypocyclois. Tum autem erit $p^2 =$

(2a—

$\frac{(2a-f)yy+ccf}{2a}$, vnde p vbique praeter in A erit maior quam AC. Sit $c=0$, fiet $p=y\sqrt{\frac{2a-f}{2a}}$, quare hoc casu curuae tautochronae erunt omnes spirales logarithmicae circa centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali logarithmica perpetuo eodem tempore ad centrum C pertinget, vbicunque descensum inceperit. Hac igitur vis centripetae hypothesi tautochronae erunt, primo omnes hypocycloides, deinde omnes lineae rectae vtcunque ductae, tertio omnes spirales logarithmicae, et quarto infinitae curuae aliae hac aequatione contentae $p^2=\frac{(2a-f)y^2+ccf}{2a}$ si quidem fuerit $2a>f$ et c non $=0$. In hac autem vis centripetae hypothesi pro tautochronis tantum dederunt hypocycloides Neutonus in Princ. et Hermannus in Phoronomia et Comment. Acad. Petrop. A. 1727. quamvis hic aequationem aeque generalem ac nostram habuerit.

Exemplum 2.

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum a centro, vt sit $P=\frac{ff}{yy}$, erit $\int P dy=\frac{-ff}{y}+\frac{ff}{c}=\frac{ff(y-c)}{cy}$. Curua igitur AM erit $=2\int\sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}}$; atque $pp=\frac{acffyy+cy^5-y^6}{acf}$, vnde inuenitur radius osculi $\frac{ydy}{dp}=\frac{2acfy\sqrt{(acff+cy^3-y^4)}}{2acff+5cy^3-6y^4}$. Vbi ergo p euanescit ibi etiam radius osculi fit $=0$. Ipsius BC valor autem reperietur ex hac aequatione $y^4=cy^3+acff$. Si igitur ponatur $BC=k$, erit a =

$= \frac{k^4 - ck^3}{cff}$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceterum apparet hanc curuam intra A et B habere posse punctum flexus contrarii, id quod euenit, si curua in A est concaua versus C, nempe si fuerit $2aff > c^3$.

Exemplum 3.

429. Sit vis centripeta vbique constans seu $P = 1$, erit $\int P dy = y - c$. Quare si centro C radio CM ducatur arcus MP, erit $\int P dy = AP$, atque arcus $AM = 2\sqrt{a(y-c)} = 2\sqrt{a.\ AP}$. At erit porro $p^2 = y^2 - \frac{y^2(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^2 - y^3}{a}$, vnde inuenitur $BC = a + c$, et curua $AM = 2a = 2(BC - AC)$. Radius osculi vero in puncto M erit $= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a+2c-3y}$. In puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curua igitur in A erit concaua versus C si $2a > c$ at conuexa si $c > 2a$, atque radius osculi in A erit infinite magnus, si $2a = c$. Primo casu, quo curua in A est concaua versus C, curua habebit punctum flexus contrarii, vbi est $CM = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3} BC$. Si est $c = 0$, ita vt punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda huius curuae, eritque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curuae radius osculi in ipso centro C est infinite paruus, atque est $p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}}$, curua autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PRO-

PROPOSITIO 49.

Problema.

430. *Si corpus sollicitetur a potentiis quibuscunque, inuenire curuam* AM, *super qua omnes descensus ad punctum* A *usque fiant aequalibus temporibus.*

Tabula XI. Fig. 3.

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes reduci possunt ad duas, quarum altera corpus perpetuo deorsum trahat secundum MQ, altera vero horizontaliter secundum MP. Sit vis, quae secundum MQ trahit $= P$, et vis quae secundum MP trahit $= Q$: dicantur $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, sitque celeritas in puncto A debita altitudini b et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit $v = b - \int P dx - \int Q dy$. Quare si ponatur $b = b$ et $\int P dx + \int Q dy = z$, erit v functio vnius dimensionis ipsarum b et z, et propterea $m = 1$ (408). Quamobrem habebitur pro curua quaesita ista aequatio $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a(\int P dx + \int Q dy)}$, seu $ds = \frac{aPdx + aQdy}{\sqrt{a(\int Pdx + \int Qdy)}}$. At quia est $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ erit $\frac{dy}{dx} = \frac{aPQ \pm \sqrt{(\int Pdx + \int Qdy)(aP^2 - \int Pdx - \int Qdy + aQ^2)}}{\int Pdx + \int Qdy - aQ^2}$. In ipso ergo principio A, vbi est $\int P dx + \int Q dy = o$, erit $P dx + Q dy = o$, seu $dy : dx = -P : Q$. Atque vt ex praecedentibus intelligitur tempus cuiusque descensus aequatur tempori, quo in hypothesi grauita-

 tis

tis = 1 pendulum longitudinis $2a$ descensum absoluit. Q. E. I.

Scholion.

431. Si habeatur curua, super qua omnes descensus fiunt eodem tempore, facile erit dare curuas super quibus oscillationes omnes eodem tempore peragantur. Nam quia in vacuo ascensus similes sunt descensibus, omnis curua, quae est tautochrona pro descensibus, talis quoque erit pro ascensibus. Quare duae curuae tautochronae coniunctae in puncto A dabunt curuam, super qua omnes oscillationes sunt isochronae. Attamen hac ratione alterum problema, quo curuae omnes oscillationes isochronas producentes requiruntur, non perfecte soluitur: dari enim possunt curuae infinitae huic quaestioni satisfacientes, quarum tamen partes non sint aptae ad descensus solos isochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi potest: data curua quacunque inuenire aliam, quae cum ea coniuncta producat omnes oscillationes aequidiurnas. Nunc vero antequam ad haec progrediamur, aliud problema proferemus, in quo quaeritur curua datae curuae adiungenda, vt omnes descensus super hac curua composita absoluantur temporibus aequalibus. Quod problema vt maxime difficillimum mihi quondam erat propositum a Cl. Dan. Bernoulli. Attamen hac methodo, qua in inuestigatione tautochronarum vtor, etiam istud problema resolui potest.

PRO-

PROPOSITIO 50.
Problema.

432. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis, si detur curua* ANB, *inuenire curuam* BMF *ei adiungendam, ut omnes descensus super hac curua composita ad* A *usque absoluantur aequalibus temporibus, in quocunque curuae* BMF *puncto descensus incipiat.*

Tabula XI. Fig. 4.

Solutio.

Si descensus incipiat in infimo curuae quaesitae puncto B, descensus fiet per datam curuam BNA tantum, eius ergo tempori, quod etiam dabitur, aequalia esse debent omnium descensuum tempora. Sit $AD=a$, $AQ=u$, $AN=t$; dabiturque aequatio inter u et t. Pro curua autem quaesita sit $BP=x$ et $BM=s$. Nunc in descensu quocunque sit celeritas in puncto B debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b-x$; atque celeritas in N debita altitudini $a+b-u$. Tempus ergo descensus per curuam incognitam est $\int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$ ita integratum vt euanescat posito $x=0$, et post integrationem posito $x=b$. Tempus vero per curuam cognitam BNA erit $\int\frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$, ita integratum vt euanescat posito $u=0$, atque post integrationem posito $u=a$. Expressio ergo $\int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$ postquam factum est $x=b$, ita debet esse com-

comparata, vt si addatur ad expressionem temporis per BNA, ex aggregato penitus egrediatur littera b: tum enim totius tempus descensus erit quantitas constans neque pendens a b seu a puncto curuae BMF, in quo descensus incepit. Sit integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(a+a-b)}}$ postquam positum est $u=a$ aequale huic seriei $k+\alpha b+\beta b^2+\gamma b^3+\delta b^4+$ etc. $+\zeta\sqrt{b}+\eta b\sqrt{b}+\theta b^2\sqrt{b}+\mathfrak{z} b^3\sqrt{b}+$ etc. Quare si descensus in puncto B incipiat, tempus totius descensus erit $=k$, ob euanescentem b. Ipsi k ergo aequale esse debet tempus totius descensus per curuam compositam, in quocunque curuae B M F puncto ponatur initium descensus. Sit nunc curuae quaesitae B M F natura sequente serie expressa $ds=-A\,dx\sqrt{x}-B\,x\,dx\sqrt{x}-C\,x^2dx\sqrt{x}-D\,x^3dx\sqrt{x}-$ etc. $-F\,dx-G\,x\,dx-H\,x^2dx-I\,x^3dx-$ etc. Ponatur peripheriae ad diametrum ratio $\pi:1$, quae reuera est $l-1:\sqrt{-1}$, ita vt sit $\pi=-\frac{l-1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}\cdot l-1$. Est vero post integrationem, posito $x=b$, $\int\frac{A\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}=\frac{1}{2}\pi A b$; $\int\frac{B\,x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}=\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\pi B b^2$; $\int\frac{C\,x^2dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\pi C b^3$ etc. Atque $\int\frac{F\,dx}{\sqrt{(b-x)}}=2F\sqrt{b}$; $\int\frac{G\,x\,dx}{\sqrt{(b-x)}}=\frac{2}{3}2G\,b\sqrt{b}$; $\int\frac{H\,x^2dx}{\sqrt{(b-x)}}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}2H\,b^2\sqrt{b}$; etc. Quo igitur horum terminorum cum illis terminis coniunctim tempus per BNA exprimentibus aggregatum aequetur ipsi k, termini homogenei b inuoluentes sese tollere debent. Fiet igitur $\frac{1}{2}\pi A=\alpha$ seu $A=\frac{2}{1}\cdot\frac{\alpha}{\pi}$; similique modo $B=\frac{2\cdot4}{1\cdot3}\cdot\frac{\beta}{\pi}$; $C=\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}\frac{\gamma}{\pi}$ etc. Atque $F=\frac{\zeta}{2}$; $G=\frac{3}{2}\frac{\eta}{2}$;

H=

$H = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\theta}{2}$; $I = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\iota}{2}$ etc. Quamobrem cum α, β, γ, δ, etc. ζ, η, θ, ι etc. sint quantitates cognitae propter curuam ANB datam; habebitur pro curua quaesita BMF ista aequatio: $ds = \frac{-dx}{\pi} \left(\frac{2}{1}\alpha \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \beta x \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \gamma x^2 \sqrt{x} + \text{etc.}\right) - \frac{dx}{2} \left(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \theta x^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \iota x^3 + \text{etc.}\right)$, cuius integralis est $s = \frac{-2}{\pi} \left(\frac{2}{3}\alpha x \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \beta x^2 \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \gamma x^3 \sqrt{x} + \text{etc.}\right) - \frac{1}{2} \left(\zeta x + \frac{3}{4} \eta x^2 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \theta x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \iota x^4 + \text{etc.}\right)$. Cuius seriei hanc do constructionem: sumatur $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+d-u)}}$ ita vt euanescat posito $u = o$, tum fiat $u = a$, et prodibit functio quaedam ipsius b. Ponatur $x(1-z)$ loco b et quod prodit sit R. Tum integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$ dum x vt constans consideretur, ita vt euanescat posito $z = o$. Deinde ponatur $z = 1$, et prodibit functio ipsius x quae erit $= \frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hocque modo prodibit aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Scholion I.

433. Constructio haec prorsus singularis sed facilis tamen sequitur ex ea methodo, qua vsus sum in aequatione a C. Riccati quondam proposita construenda, atque hac potissimum gaudet praerogatiua, quod quaecunque fuerit curua data, quaesita eius ope semper possit construi, etiamsi aequatio ipsa, quae pro curua inuenitur minime saepe tractari possit. Dat praeterea statim aequationem finitam eam, quae alias ex summatione serierum inueniretur.

Co-

Corollarium 1.

434. Si in aequatione pro curua BMF inuenta ponatur $x=o$, erit $ds=\frac{-\zeta dx}{2}$, vnde inclinatio curuae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appareat, quomodo hae duae curuae inuicem cohaereant, oportet quoque positionem tangentis curuae ANB in B determinare.

Corollarium 2.

435. Sit DQ$=p$ et BN$=q$, erit $dt=-dq$ et $a-u=p$. Vnde tempus per BNA erit $=\int\frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}$ posito in hoc integrali $p=a$. Sit in ipso puncto B, $dq=Ldp$, erit generatim $dq=Ldp+Pdp$, existente P tali functione ipsius p, quae euanescat posito $p=o$. Videamus ergo euanescente p qualem terminum haec aequatio $\int\frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}=\int\frac{Ldp}{\sqrt{(b+p)}}$ producat. Prodit autem posito $p=a$, $2L\sqrt{(b+a)}-2L\sqrt{b}$, vnde in serie initio assumta prodit terminus $-2L\sqrt{b}$, qui conuenit cum $\zeta\sqrt{b}$, erit ergo $L=-\frac{\zeta}{2}$ et $dq=\frac{-\zeta dp}{2}$. Ex quo intelligitur curuam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B communem habere tangentem.

Scholion 2.

436. Dixi $2L\sqrt{(b+a)}-2L\sqrt{b}$ in serie dare hunc terminum $-2\zeta\sqrt{b}$; nam $\sqrt{(b+a)}$, dat terminos hos $\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}+$etc. cum aliis comparan-

parandos. Hic autem solus terminus Ldp dat terminum huius formae $\zeta \sqrt{b}$. Quare ex eo tantum de inclinatione curuae in B concludere licet.

Scholion 3.

437. Constructio curuae quaesitae quam dedi etiam hoc modo immutari potest, scribatur postquam in integrali $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$ positum est $u=a$, loco b hoc xz, et vocato eo, quod prodit R, integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}}$, in quo x vt quantitas constans tractetur, ita vt euanescat posito $z=0$. Tum ponatur $z=1$, atque id quod prouenit, aequetur ipsi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$; hacque ratione plerumque commodius aequatio pro curua quaesita obtinetur.

Exemplum 1.

438. Sit curua data ANB cyclois ita vt sit $t=2\sqrt{cu}$, seu $dt=\frac{cdu}{\sqrt{cu}}$; erit $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}} = \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au-u^2)}} - \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au+bu-u^2)}} = \sqrt{-c}\; l\frac{a-2u-2\sqrt{(u^2-au)}}{a} - \sqrt{-c}\; l\frac{a+b-2u-2\sqrt{(u^2-au-bu)}}{a+b}$. Ponatur $u=a$ et habebitur $\sqrt{-c}\; l-1 - \sqrt{-c}\; l\frac{b-a-2\sqrt{ab}}{a+b} = \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{-c}\; l(\sqrt{b}-\sqrt{-a}) + \sqrt{-c}\; l(a+b) = \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c}\; l\frac{\sqrt{b}+\sqrt{-a}}{\sqrt{b}-\sqrt{-a}}$. Ponatur xz loco b et habebitur $R = \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c}\; l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}}$, quo multiplicato per $\frac{dz}{\sqrt{(1-z)}}$ habebitur $\frac{\pi dz\sqrt{c}}{\sqrt{(1-z)}} + \frac{dz\sqrt{-c}}{\sqrt{(1-z)}}\; l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}}$, cuius integrale est $=-2\pi\sqrt{c(1-z)} - 2\sqrt{c(z-1)}\; l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}} - \frac{2\sqrt{-ac}}{\sqrt{x}}\; l\frac{\sqrt{(z-1)}+\sqrt{z}}{\sqrt{(z-1)}-\sqrt{z}}$

$-\frac{2\sqrt{-c(a+x)}}{\sqrt{x}}\, l\frac{\sqrt{-a(1-z)}-\sqrt{z(a+x)}}{\sqrt{-a(1-z)}+\sqrt{z(a+x)}} + 2\pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c}.\sqrt{-1}.\, l-1$, qui duo vltimi termini ſunt inter ſe aequales ob $\pi = \sqrt{-1}.\, l-1$. Ponatur nunc $z = 1$ habebitur $\frac{-2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}}{\sqrt{x}}\pi$, quod aequale eſt ponendum ipſi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hinc prouenit iſta aequatio $s = -2\sqrt{ac} + 2\sqrt{c(a+x)}$ ſeu $s + \text{ANB} = \text{ANBM} = 2\sqrt{c}(\text{AD}+\text{BP})$. Ex quo patet curuam BME eſſe continuationem datae AND, ita vt coniunctae totam cycloidem conſtituant; id quod ex natura tautochronismi, cui cyclois ſatisfacere inuenta eſt, per ſe ſequitur.

Exemplum 2.

439. Sit linea data ANB recta ad horizontem vtcunque inclinata erit $dt = ndu$, atque $\int\frac{ndu}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{ndu}{\sqrt{(a+b-u)}} = 2n\sqrt{a} - 2n\sqrt{(a-u)} - 2n\sqrt{(a+b)} + 2n\sqrt{(a+b-u)}$. Ponatur $u = a$ atque $b = xz$, erit $R = 2n\sqrt{a} + 2n\sqrt{xz} - 2n\sqrt{(a+xz)}$. Quamobrem erit $\int\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}} = 2n\int\frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{(1-z)}} + 2n\sqrt{x}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-z)}} - 2n\int\frac{dz\sqrt{(a+xz)}}{\sqrt{(1-z}} = 4n\sqrt{a} - 4n\sqrt{a(1-z)} + 2n\sqrt{x}\int\frac{zdz}{\sqrt{(z-z^2)}} - 2n\int\frac{adz+xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}$. Eſt vero $\int\frac{zdz}{\sqrt{(z-zz)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-zz)}} - \sqrt{(z-zz)} = \frac{1}{2}\pi$, poſtquam in integrali poſitum eſt $z = 1$. At $\int\frac{adz+xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}$, ſi poſt integrationem ponatur $z = 1$, dat $\sqrt{a} + \frac{a+x}{2\sqrt{x}}\text{A}.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$, denotante $\text{A}.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ arcum circuli radii $= 1$, cuius ſinus eſt $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Quocirca erit $\frac{\pi b}{\sqrt{x}} = 4n\sqrt{a} + n\pi\sqrt{x} - 2n\sqrt{a} - \frac{n(a+x)}{\sqrt{x}}\text{A}.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$, hinc-

hincque $s = nx + \frac{2n\sqrt{ax}}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Huius aequationis differentialis eſt $ds = ndx - \frac{ndx}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x} = \frac{sdx + nadx}{a+x} - \frac{2ndx\sqrt{ax}}{\pi(a+x)}$. Curua haec autem non vltra datam altitudinem poterit aſcendere vt in F vsque, vbi erit $ds = dx$. Poſito igitur $ds = dx$, erit $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Fiat ergo vt $n : n-1$ ita ſemiperipheria circuli cuius radius eſt 1, ad arcum eiusdem circuli, cuius coſinus ſit m, erit $\frac{a-x}{a+x} = m$ atque $x = \frac{a(1-m)}{1+m}$. Vt ſi fuerit angulus DAB, 60°, erit $n = 2$, et $m = 0$, ideoque BE $= a =$ AD. Ex quo ſequitur, ſi angulus DAB fuerit maior quam 60. grad. fore $x > a$, at ſi ille angulus minor fuerit quam 60°, fore $x < a$. Ceterum ex aequatione differentiali apparet, vt jam notauimus in puncto B fore $ds = ndx$, tum vero perpetuo fieri $ds < ndx$, vsque in F, vbi eſt $ds = dx$.

Corollarium 3.

440. Si linea recta BNA fuerit horizontalis erit $n = \infty$ et $a = 0$. Si autem ſit $n\sqrt{a} = \sqrt{f}$, erit $ds = \frac{sdx}{x} - \frac{2dx\sqrt{fx}}{\pi x}$ ex aequatione differentiali inventa, cuius integrale eſt $\frac{s}{x} = \frac{-2}{\pi}\int\frac{dx\sqrt{f}}{x\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{f}}{\pi\sqrt{x}}$, ideoque $s = \frac{4}{\pi}\sqrt{fx}$. Curua ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curuae datae locum tenet.

Corollarium 4.

441. Si aequatio differentialis $ds = ndx - \frac{ndx}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ denuo differentietur posito dx constante, prodibit $dds = \frac{-nadx^2}{\pi(a+x)\sqrt{ax}}$. Ex qua aequatione sequitur curuae in B radium osculi fore infinite paruum.

Scholion 4.

442. Ex aequatione generali differentiali $ds = \frac{-dx}{\pi}(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2.4}{1.3}\beta x\sqrt{x} + \text{etc.}) - \frac{dx}{2}(\zeta + \frac{3}{2}\eta x +$ etc. sequitur semper fore $dds = \infty$ posito $x = o$, nisi fuerit $\alpha = o$. Quoties igitur non fuerit $\alpha = o$ radius osculi curuae quaesitae in B erit $= o$. At si fuerit $\alpha = o$, tum radius osculi curuae BMF in puncto B inuenitur $= \frac{\zeta^2}{3\eta}\sqrt{(\frac{\zeta^2}{4} - 1)}$. Ex quo in quouis exemplo proposito statim radius osculi curuae in puncto B innotescit.

Exemplum 3.

443. Si curua data ANB hanc habuerit aequationem, vt sit $dt = Cu^n du$; erit tempus per $NA = \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}$. Ponatur $a+b = f$ et $f-u = r^2$, erit $u = f - r^2$ et $u^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} r^2 + \frac{n.n-1}{1.2} f^{n-2} r^4 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} f^{n-3} r^6 +$ etc. Cum vero sit $\frac{du}{(\sqrt{a+b-u})} = -2dr$; erit $\int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}} = \text{Const.} - 2C(f^n r -$

$\frac{n}{1.3} f^{n-1} r^3 + \frac{n.\,n-1}{1.\,2.\,5} f^{n-2} r^5 - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3.\,7} f^{n-3} r^7 +$ etc.). Quia autem haec quantitas euanefcere debet facto $u = o$ feu $r = \sqrt{f}$; erit quantitas illa conftans addenda $= 2\,C f^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.\,n-1}{1.2.5}\right.$ $\left. - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.2.3.\,7} + \text{etc.}\right)$. Ponatur nunc $u = a$ feu $r = \sqrt{b}$, atque loco feriei $1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.\,n-1}{1.2.5} - $ etc. ponatur N, prodibit totum defcenfus per BNA tempus $= 2\,\text{CN} f^{n+\frac{1}{2}} - 2\,C\left(f^n \sqrt{b} - \frac{n}{1.3} f^{n-1}\, b\sqrt{b} + \frac{n\,n-1}{1.2.5} f^{n-2} b^2 \sqrt{b} - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.2.3.\,7} f^{n-3}\, b^3 \sqrt{b} + \text{etc.}\right)$. Reftituatur $a+b$ loco f et orietur hoc tempus $=$ $2\,\text{CN}\left(a^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)}{2} a^{n-\frac{1}{2}} b + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.\;4} a^{n-\frac{3}{2}} b^2 + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.\;4.\;6.} a^{n-\frac{5}{2}} b^3 + \text{etc.}\right) - 2\,C\left(a^n \sqrt{b} + \frac{2\,n}{1.\,3} a^{n-1}\, b\sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)}{1.3.5.} a^{n-2} b^2 \sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1.\,3.\,5\;7} a^{n-3}\, b^3 \sqrt{b} + \text{etc.}\right)$. Haec igitur feries cum ferie affumta hoc tempus exprimente comparata dat: $k = 2\,\text{CN}\, a^{n+\frac{1}{2}}$; $\alpha = \frac{2n+1}{2}\; 2\,\text{CN} a^{n-\frac{1}{2}}$; $\beta = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.\;4}$ $2\,\text{CN} a^{n-\frac{2}{3}}$; $\gamma = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.\;4.\;6}\; 2\,\text{CN}\, a^{n-\frac{5}{2}}$ etc. $\zeta = -2\,C\, a^n$; $\eta = \frac{-2n}{1.\;3}\, 2\,C a^{n-1}$; $\theta = \frac{-2n(2n-2)}{1.\;3.\;5}\, 2\,C a^{n-2}$ etc. Hinc oritur $ds = \frac{-2\,\text{CN} a^n dx}{n} \left(\frac{(2\,n+1)\sqrt{x}}{1.\;\sqrt{a}}\right.$ $\left. + \frac{(2n+1)(2n-1)x\sqrt{x}}{1.\;3.\;a\sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2\sqrt{x}}{1.\;3.\;5.\;a^2\sqrt{a}} + \text{etc.}\right)$ $+ C a^n dx \left(1 + \frac{n.\,x}{1.\,a} + \frac{n(n-1)x^2}{1.\;2.\;a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.\;2.\;3,\;a^3} + \text{etc}\right)$ Huius vero feriei pofterioris fumma eft $C\,dx\,(a$ $+ x)^n$, huiusque integralis $\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}$. Quare

post integrationem habebitur $s = \frac{C(a+x)^{n+1} - C a^{n+1}}{n+1}$

$- \frac{4 C N a^n \sqrt{x}}{\pi \sqrt{a}} \left(\frac{2n+1}{3} x + \frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3 \cdot 5 \cdot a} \right.$
$\left. + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^2} + \text{etc.} \right)$. Quae est aequatio pro curua quaesita BMF, quae toties ex terminorum numero finito constat, quoties n fuerit terminus huius seriei $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc. Est vero $N = \int dp(1-pp)^n$ si post integrationem ponatur $p = 1$. Hacque facta substitutione est $\int dp (1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \int dp(1-pp)^n$. Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, quia est $\int \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{\pi}{2}$, erit si $n = \frac{1}{2}$, $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$ erit $N = \frac{3\pi}{4 \cdot 4}$; si $n = \frac{5}{2}$ erit $N = \frac{3}{4} \frac{5 \cdot \pi}{6 \cdot 4}$; si $n = \frac{7}{2}$ erit $N = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4}$ etc. At quia si $n = 0$ est $N = 1$, erit si $n = 1$, $N = \frac{2}{3}$; si $N = 2$, erit $N = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$; si $n = 3$; erit $N = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ etc. Vt si curua fuerit cyclois erit $n = -\frac{1}{2}$, ideoque erit $s = 2C\sqrt{(a+x)} - 2C\sqrt{a}$ vt supra inuenimus. (438.).

Scholion 5.

444. Quando igitur est $dt = C u^n du$, hic valor pro s inuenitur, atque ex ipsa methodi natura intelligitur: si dt aequetur aggregato aliquot huiusmodi terminorum, tum s aequalem fore aggregato serierum a singulis terminis productarum. Hac igitur ratione, si curua data fuerit

rit quaecunque, feries eft quaerenda terminorum huius formae $C u^n du$, ipfi dt aequalis. Atque ex iis omnibus debitus ipfius s valor obtinebitur. Vt fi fuerit natura lineae datae ANB haec $dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{c}}$; primus terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$; vnde fit $s = 2\sqrt{c(a+x)} - 2\sqrt{ac}$, alter terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$, et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$ vnde oritur $s = \frac{2(a+x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$. Curua quaefita ergo fequente aequatione exprimetur $s = \frac{2(a+3c+x)\sqrt{(a+x)} - 2(a+3c)\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$.

Exemplum 4.

445. Sit curua data circulus diametri c, erit $dt = \frac{\frac{1}{2} c\, du}{\sqrt{(cu-u^2)}} = \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{\sqrt{cu}} + \frac{1.\sqrt{u}}{2.c\sqrt{c}} + \frac{1.3.u\sqrt{u}}{2.4.c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right)$ Sumto nunc quolibet termino feorfim et inveniatur valor ipfius ds, habebitur colligendis omnibus $ds = \frac{c\,dx}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \frac{1\sqrt{(a+x)}}{2c\sqrt{c}} + \frac{1.3\,(a+x)^{\frac{3}{2}}}{2.4.c^2\sqrt{c}} \right.$
$\left. \frac{-1\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4.c^2\sqrt{c}} \text{ etc.} \right.$
$\frac{-3.1.3\,a\sqrt{x}}{2.2.4\,c^2\sqrt{c}}$

Ex quibus fequens aequatio nafcitur $\frac{2ds}{c\,dx} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)(c-a-x)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}}\right) - \frac{a}{1.\,dx}\, d\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}}\right) - \frac{a^2}{1.2.\,dx^2}\, dd\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \frac{1.3\,x\sqrt{x}}{2.4\,c^2\sqrt{c}}\right) - \frac{a^3}{1.2.3.\,dx^3}\, d^3\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \right.$

I 3.

$\frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4c^2\sqrt{c}} - \frac{1.3.5.x^2\sqrt{x}}{2.4.6c^3\sqrt{c}}) -$ etc. Quae expreſſio in multas alias formas transmutari poteſt.

PROPOSITIO 51.

Problema.

Tabula XI. Fig. 5.

445. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis ſi detur curua quaecunque* AM, *inuenire curuam* AN *eiusmodi, vt oſcillationes, quae peraguntur ſuper curua compoſita* MAN, *ſint omnes inter ſe iſochronae.*

Solutio.

Sit datae curuae AM abſciſſa AP$=u$; arcus reſpondens AM$=t$, dabitur ob curuam datam aequatio inter u et t. Deinde in curua quaeſita AN ponatur abſciſſa AQ$=x$ et arcus AN$=s$. Iam in oſcillatione quacunque ſit celeritas in puncto A debita altitudini b; eritque tempus per MAN$=\int\frac{dt}{\sqrt{(b-u)}}+\int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$. Atque ſi in hac expreſſione ponatur $u=b$ et $x=b$ prodibit tempus vnius ſemioſcillationis; quod cum debeat eſſe conſtans, ex formula id exprimente littera b prorſus euaneſcere debet. Ponatur $dt=\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}+Pdu$ et $ds=\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}}-Qdx$; eritque tempus vnius ſemioſcillationis $=\int\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}}+\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(bx-x^2)}}+\int\frac{Pdu}{\sqrt{(b-u)}}-\int\frac{Qdx}{\sqrt{(b-x)}}$ poſtquam poſitum eſt $u=b$ et $x=b$. Huius autem expreſ-

expressionis duo priores termini jam ita sunt comparati, vt b ex iis euanescat facto $u=b$ et $x=b$, dant nimirum $\pi\sqrt{f}+\pi\sqrt{b}$, denotante π peripheriam circuli diametri $=1$. Quare si posteriores termini ita fuerint comparati, vt sese destruant, facto $u=b$ et $x=b$, habebitur id quod quaeritur; at P et Q tales necesse est sint quantitates, quae b non inuoluant, quia in aequationes curuarum ingrediuntur. At erit $\int\frac{Pdu}{\sqrt{(b-u)}}-\int\frac{Qdx}{\sqrt{(b-x)}}=0$ facto $u=b$ et $x=b$, si Q talis fuerit functio ipsius x, qualis P est ipsius u. Seu cum nihil impediat, quo minus poni possit $x=u$, fiat $x=u$; oportebitque esse $Q=P$. Datur vero P ex aequatione curuae AM datae, quippe est $P=\frac{dt}{du}-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$. Quo circa pro curua quaesita haec habebitur aequatio $ds=\frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{u}}-dt+\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$, seu $s+t=2\sqrt{bu}+2\sqrt{fu}$; ex qua aequatione determinatur natura curuae quaesitae AN. Q. E. I.

Corollarium I.

447. Sumta igitur $AP=u=x$; cum sit $AM=t$ et $AN=s$, erit $NA+MA=t+s=2(\sqrt{f}+\sqrt{b})\sqrt{AP}$, seu summa arcuum eidem abscissae respondentium proportionalis est radici quadratae ex abscissa AP.

Tabula XI. Fig. 6.

Corollarium 2.

448. Curua igitur quaesita AND ita debet esse comparata, vt summa arcuum $AM + AN$ aequalis sit arcui cycloidis eidem abscissae AP respondentis. Ex qua proprietate sponte fluit, omnes oscillationes esse isochronas.

Corollarium 3.

449. Tempus ergo vnius oscillationis, aequatur tempori descensus super cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est $2(\sqrt{f}+\sqrt{b})^2$. Seu pendulum huius longitudinis producet semioscillationes minimas isochronas oscillationibus super curua MAN. Pendulum vero long. $\frac{1}{2}(\sqrt{f}+\sqrt{b})^2$, peraget totas oscillationes isochronas.

Corollarium 4.

450. Quia quantitatem b pro lubitu accipere licet, infinitae curuae AND satisfaciunt: atque etiam ea poterit determinari vt tempus oscillationis sit datae quantitatis. Vt si vna oscillatio isochrona esse debeat oscillationi penduli longitudinis $\frac{L}{4}$; erit $L = 2(\sqrt{f}+\sqrt{b})^2$, ideoque $\sqrt{b} = \sqrt{\frac{L}{2}} - \sqrt{f}$. Quare L maius esse debet quam $2f$.

Corollarium 5.

451. Si data curua AM fuerit cyclois seu $dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{t}}$, altera curua AN erit quoque cyclois quo-

quaecunque, fit enim $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}}$. Atque fuper duabus huiusmodi cycloidibus non folum integrae ofcillationes erunt ifochronae, fed etiam finguli afcenfus et defcenfus fuper qualibet cycloide abfoluentur eodem tempore.

Exemplum I.

452. Sit curua data AM recta vtcunque ad horizontem inclinata, vt fit $dt = ndu$, prodibit pro curua quaefita pofito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f} + \sqrt{b}$ haec aequatio $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - ndu = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - ndx$. Quare fi vocetur $PN = y$, erit $dy = dx\sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} + n^2 - 1)}$ vbi $\frac{L}{2}$, denotat longitudinem penduli ifochroni: ex qua aequatione curua quaefita poterit conftrui. Curua autem in D habebit punctum reuerfionis ibique tangentem verticalem, quod habebitur fumendo $AC = \frac{L}{2(n+1)^2}$. Curuae vero in infimo loco A radius ofculi eft $= L$. Hic praeterea notandum eft fi $n = 1$, quo cafu linea AM fit recta verticalis in AC incidens, fore curuam quaefitam algebraicam; erit namque $dy = \frac{dx\sqrt{(L - 2\sqrt{2Lx})}}{\sqrt{2x}}$, cuius integralis eft $y = \frac{L}{3} - \frac{(\sqrt{L} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(L - 2\sqrt{Lx})}}{3}$ feu $9y^2 - 6Ly = -6L\sqrt{2Lx} + 24Lx - 16x\sqrt{2Lx}$, quae ab irrationalitate prorfus liberata fit quatuor dimenfionum. Huius curuae cufpis D habebitur fumendo $AC = \frac{1}{8}L$, quo cafu fit $CD = \frac{L}{3}$.

Exemplum 2.

453. Sit curua data AM circulus radii a; erit $dt = \frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}}$. Hinc posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f}+\sqrt{b}$ erit $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - \frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}} = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - \frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Ex qua aequatione sequitur $dy = dx\sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2a\sqrt{L}}{x\sqrt{(4a-2x)}} + \frac{a^2}{2ax-xx} - 1)}$. Cuspis curuae AND erit vbi est $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ seu $4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 + 24a^2x^2 - 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8a^3L + 4a^4 = 0$. Ponatur $L = a$, fiet $x = 0$ et $4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x - 8a^3 = 0$. At si $L = 2a$, erit $x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 = 0$, vnde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo penduli isochroni est $\frac{a}{2}$.

Scholion.

454. Si igitur efficiatur, vt pendulum in huiusmodi curua composita oscillationes peragat, eius oscillationes aeque erunt isochronae, ac si in cycloide moueretur. Atque hanc ob rem quaecunque curua ad tautochronismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio ista quaestio, quemadmodum curuam datam comparatam esse oporteat, vt inuenta cum data vnam curuam continuam constituat, id quod sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 52.

Problema.

455. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum ten-*

tendentis inuenire curuam continuam MAN, *ſuper qua omnes ſemioſcillationes abſoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Sit igitur curua MAN curua continua, in eaque $AP = x$, et $AM = t$, et $AN = s$. Aſſumatur noua indeterminata z atque x et t ita dentur in z, vt poſita z affirmatiua prodeat curuae pars AM, at poſita z negatiua prodeat curuae pars AN. Quia nunc pro vtraque parte x eundem obtinet valorem, debebit x talis eſſe functio ipſius z, quae eadem maneat, ſiue z affirmatiue ſumatur ſiue negatiue; ſeu x debet eſſe functio par ipſius z. Deinde t eiusmodi eſſe debet functio ipſius z, vt prodeat s, ſi ponatur $-z$ loco z. At quia arcus s in alteram partem axis cadit, eius valor erit negatiuus reſpectu curuae AM: quare ſi in valore ipſius t ponatur $-z$ loco z, prodire debet $-s$. Sit nunc R functio impar ipſius z, et S eius functio par; et ponatur $t = R + S$, fiet $-s = -R + S$, ſeu $s = R - S$; vnde fit $t + s = 2R$. Sit longitudo penduli iſochroni $= a$, quia eſt $\sqrt{2a} = \sqrt{f} + \sqrt{b}$; debebit eſſe $t + s = 2\sqrt{2ax}$; hincque erit $R = \sqrt{2ax}$, et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quia autem x debet eſſe functio par ipſius z; ex hac expreſſione id per ſe obtinetur; cum enim R ſit functio impar, eius quadratum erit functio par. Sit igitur $R = z$, erit $z = \sqrt{2ax}$, atque S debebit eſſe functio par ipſius $\sqrt{2ax}$ ſeu ipſius $\sqrt{x}$. Quo facto habebitur iſta aequatio $s = \sqrt{2ax} - S$ pro omnibus curuis continuis tautochronis. Sit $dS = \frac{T dx}{\sqrt{2ax}}$

$\frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$, erit T functio impar quaecunque ipsius $\sqrt{x}$. Quapropter fiet $ds = \frac{adx - Tdx}{\sqrt{2ax}}$, atque $dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$, posito $PN = y$. Ex qua aequatione infinitae curuae tautochronae continuae reperiuntur. Q. E. I.

Corollarium I.

456. Curua igitur hoc modo inuenta AN est tautochrona cum sui ipsius parte continua AM. Dantur vero per praecedens problema infinitae aliae curuae AM, quae cum AN coniunctae oscillationes isochronas producunt.

Corollarium 2.

457. Per praecedentem propositionem omnis curua AM, cuius haec est aequatio $t = \sqrt{2cx} + S$ seu $dt = \frac{cdx}{\sqrt{2cx}} + \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ oscillationes isochronas cum curua AN producit. At harum oscillationum longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

Corollarium 3.

458. Inter has ergo infinitas curuas AM cum AN oscillationes isochronas producentes ea est continua cum AN in qua est $c = a$. Atque longitudo penduli isochroni fit $= a$, vt assumsimus.

Corollarium 4.

459. Si ponatur $c = o$; erit cum curua AN quoque tautochrona haec curua AM, cuius aequatio est $dt = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est $\frac{a}{4}$. Quoties ergo est $T = \sqrt{2bx}$;

to-

toties quoque linea recta cum AN tautochronismum producit, si ita fuerit inclinata vt anguli MAP secans sit $V\frac{b}{a}$ seu cosinus $= V\frac{a}{b}$.

Corollarium 5.

460. Quia curua AN in puncto A ad axem AP normalis esse debet, oportet vt T euanescat posito $x=o$. Idem etiam sequitur ex eo quod $a-$T debeat esse quantitas affirmatiua saltem in initio A. Si enim T fieret infinitum posito $x=o$, id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen vt S euanescat posito $x=o$, curua AN in alteram axis AP partem cadet, curuaque in A haberet cuspidem et corpus postquam super MA descendit per reflexionem super AN ascenderet, quod esset contra naturam oscillationum.

Corollarium 6.

461. Si igitur T euanescit posito $x=o$; radius osculi in A qui est $\frac{sds}{dx}$, ob $s=y$ in hoc loco, erit $=a$, ideoque oscillationes congruent cum oscillationibus minimis penduli longitudinis a vt assumsimus.

Corollarium 7.

462. Curuae portio AN habebit in D tangentem verticalem ibique cuspidem; quod punctum inuenitur ex hac aequatione $a=$T$=V\,2ax$, sumendo AC $=$ valori ipsius x ex hac aequatione. Altera quoque pars AM habebit cuspidem si alicubi fuerit $a+$T$=V\,2ax$.

Co-

Corollarium 8.

463. Si fuerit $S=o$ et $T=o$, erit $s=V2ax$. Quare curua erit cyclois atque portio AN aequalis et ſimilis curuae AM. Eſt ergo cyclois curua continua ſuper qua omnes oſcillationes abſoluuntur eodem tempore.

Exemplum.

464. Sit $T=V2bx$, quo caſu curua AN quoq; eſt tautochrona cum recta angulum AD conſtituente, cuius coſinus eſt $V\frac{a}{b}$; erit $ds=\frac{adx-dxV2bx}{V2ax}$, atque $s=V2ax-\frac{xVb}{Va}$. Habebitur autem $dy=\frac{dxV(a^2-2aV2bx+2bx-2ax)}{V2ax}$. Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in prop. praec. pro curua inuenimus, quae cum recta tautochronam conſtituat (452), ſi modo ſcribatur L pro a et n pro $V\frac{b}{a}$. Quare ſi fuerit $b=a$, curua quoque algebraica inuenitur NAM, quae eſt tautochrona, cuius aequatio eſt $dy=dx\,V\frac{a-2Vax}{2x}$, et integralis haec $3y=a-(Va-2V2x)V(a-2V2ax)$. Quae eſt ea ipſa curua, quae cum recta verticali tautochronam conſtituit, vt ſupra inuenimus (452). Longitudo vero penduli iſochroni eſt $=a$, ſi corpus in hac curua oſcilletur. At ſi moveatur ſuper recta AC et parte curuae AN, longitudo penduli iſochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque ſi D fuerit cuſpis curuae, erit $AC=\frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum aſcendit. Praeter hanc curuam tautochronam algebraicam aliae vix inueniri poterunt.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 53.

Problema.

465.

Si corpus sollicitetur deorsum a potentia vniforg, in medio quocunque resistente; determinare motum corporis descendentis super data curua AM, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.

Tabula XII. Fig. 1.

Solutio.

Ponatur in verticali AP abscissa $= x$, applicata PM$= y$ et arcus AM$= s$; sitque altitudo celeritati corporis in M debita $= v$ et resistentia in M $=$ R. Manifestum jam est ex capite praecedente si nulla esset resistentia fore $dv = g dx$. Resistentia vero minuit hoc celeritatis incrementum, et aequipollet vi tangentiali $=$ R; eiusque solius effectus in hoc consisteret, vt foret $dv = -R ds$. Quamobrem si et potentia sollicitans g, et resistentia R ambae simul in corpus agunt, erit $dv = g dx - R ds$, ex qua aequatione celeritas corporis in quouis puncto M est eruenda. Atque si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita

eſt inſtituenda, vt facto $x=0$ prodeat quoque $v=0$. Verum ſi data cum celeritate corpus in A deſcenſum inceperit, in integratione effici debet, vt poſito $x=0$, fiat v aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum autem inuenta fuerit celeritas corporis, habebitur ſimul tempus, quo quiuis arcus AM abſoluitur ſumendo $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$. Quod ad preſſionem, quam curua in M ſuſtinet, ſpectat, curua in M duplici vi premitur, vi centrifuga ſcilicet, et vi normali. Ponamus curuam eſſe conuexam deorſum, et elementum dx conſtans, erit longitudo radii oſculi in contrariam partem normalis MN directi $= \frac{ds^3}{dxddy}$, vnde vis centrifuga erit $= \frac{2vdxddy}{ds^3}$, qua curua ſecundum directionem MN premitur. Secundum eandem vero directionem curua premetur a vi normali, quae eſt $= \frac{gdy}{ds}$; vis normalis enim a potentia abſoluta g tantum oritur, quia directio vis reſiſtentiae eſt in tangente ſita, ideoque nullam vim normalem generat. Conſequenter tota vis, qua curua in M ſecundum directionem normalis MN premitur eſt $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

466. Expreſſio ergo vis curuam prementis congruit cum ea, quam in vacuo inuenimus. Neque tamen curua in medio reſiſtente eadem vi premitur qua in vacuo, ob celeritatem a qua vis cen-

centrifuga pendet, quae a medio resistente variatur.

Corollarium 2.

467. In isto descensu corpus non vt in vacuo maximam habet celeritatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis; sed posito $dv=o$, locus in quo corpus maximam habet celeritatem inuenitur ex hac aequatione $gdx=\mathrm{R}ds$ seu $\frac{dx}{ds}=\frac{\mathrm{R}}{g}$ in eo puncto, vbi sinus anguli, quem tangens curuae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum vt potentia absoluta g ad resistentiam in eo loco.

Corollarium 3.

468. Celeritas corporis igitur augetur vsque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; vltra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, quia tum $\mathrm{R}ds$ excedit gdx, et hanc ob rem fit dv negatiuum.

Corollarium 4.

469. Si resistentia fuerit vt potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit vniforme, cuius exponens sit k; vbi k est altitudo celeritati debita, qua cum corpus mouetur, resistentiam patitur vi grauitati aequalem. Hoc ergo casu erit $\mathrm{R}=\frac{v^m}{k^m}$

$\frac{v^m}{k^m}$, atque ista habebitur aequatio ad motum definiendum: $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$.

Corollarium 5.

470. Si autem abscissae in axe BQ capiantur, fueritque $BQ = x$, $QM = y$, et $BM = s$, propter harum quantitatum differentialia negatiua respectu priorum, habebitur $dv = -g\,dx + R\,ds$. Quae aequatio ita est integranda, vt posito $x = o$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curua sustinet, est $= \frac{g\,dy}{ds} - \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^2}$.

Corollarium 6.

471. Si medium fuerit vniforme cuius exponens sit k, resistentia vero functioni cuicunque ipsius v, quae sit V, proportionalis. Sumatur K talis functio ipsius k, qualis V est ipsius v, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$; ideoque habebitur ista aequatio $dv = -g\,dx + \frac{V\,ds}{K}$, sumto axe BQ.

Scholion 1.

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis exhibentem dedi pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox hac mox illa vtemur.

vtemur. Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto vt A, vtemur priore formula AP pro axe sumente. At si in eadem curua plures descensus ad punctum fixum vsque B sint considerandi, vt in motu oscillatorio vsu venit, posteriore formula vtemur, in qua BQ pro axe habetur.

Scholion 2.

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data curua determinari debet, ita est comparata, vt indeterminatae paucis casibus a se inuicem separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum spectat, concludi licet. Quamobrem eos tantum casus euoluere conuenit, quibus aequatio $dv = \pm g dx \mp \frac{V ds}{K}$ vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omnino ad tres casus generales reducentur. Primus est, quando linea super qua corpus mouetur est recta, tum enim ob $ds = n dx$, aequatio transit in hanc $\frac{\pm K dv}{gK - nV} = dx$, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Secundus casus est, quando in V vnicam tantum obtinet dimensionem v, tum enim aequatio integrationem admittit. Tertius casus est, quando tam v quam aequatio pro curua ita est comparata, vt in aequatione v et x, vbique eundem dimensionrm numerum constituant; tum enim per regulam notam Bernoullianam indeterminatae a se inuicem possunt separari. Hoc autem euenit, si in $V ds$ vnica fuerit dimensio ipsarum v et x. Praeter hos quidem casus essent duo alii, integrationem admittentes, sed qui huc non perti-

 nent.

nent. Primus est si resistentia euanescit, qui vero casus in praecedente Capite iam sufficienter est pertractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans g euanescit; de quo autem non est opus vt agamus, quia motus super quacunque linea congruit cum motu super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dictum. Praeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fuerit $V = v^2$, quoties scilicet aequatio pro curua ita est comparata, vt aequatio ad casum aequationis, quam quondam Com. Riccati proposuit, potest reduci. Generaliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi, atque finita expressione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis Riccatianae dedi constructionem. Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres casus expositos, subinde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato celeritatis est proportionalis, euoluemus.

Scholion 3.

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est difficilis et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, vt capite praecedente fecimus, eam accommodabimus; sed nobis perpetuo potentia sollicitans erit vniformis et deorsum directa; neque de viribus centripetis multum erimus solliciti. Atque cum potentia sollicitans ponatur vniformis, medium resistens quo-

quoque tale poni conueniet; fluidum enim quod resistentiam generat, ipsam corporis grauitatem minuit, et si id non esset vniforme, potentia absoluta non recte vniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem curuam in qua corpus mouetur, totam in eodem plano positam assumemus, quo multas difficultates nullam vtilitatem afferentes remoueamus.

PROPOSITIO 54.

Problema.

475. *Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potentia vniformi* g, *in medio quocunque resistente; determinare motum corporis super data curua* AM *ascendentis et pressionem, quam curua in singulis punctis* M *patitur.*

Tabula XII. Fig. 2.

Solutio.

In verticali AP posita abscissa $AP = x$; $PM = y$ et $AM = s$; sit altitudo celeritati in A debita $= b$; eique in M debita $= v$; atque resistentia in $M = R$. Erit igitur dum corpus ascendit tam potentia sollicitans g, quam resistentia R motui contraria. Hanc ob rem erit simili modo, quo in praecedente prop. $dv = -g\,dx - R\,ds$. Ex qua aequatione v ita debet determinari, vt facto $x = o$ fiat $v = b$. Deinde cum resistentia in pressionem, quam curua patitur, non ingrediatur, erit

erit vt supra pressio tota, quam curua in M secundum directionem normalis MN sustinet $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$ posito dx constante; vbi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem, et $-\frac{2vdxddy}{ds^3}$ vim centrifugam, vtramque juxta MN directam. Q. E. I.

Corollarium 1.

476. In ascensu corporis ergo super quacunque curua celeritas corporis perpetuo imminuitur; atque punctum curuae D reperietur, in quo corporis ascendentis celeritas euanescit, si in aequatione $dv = -gdx - Rds$ post integrationem ponatur $v = o$.

Corollarium 2.

477. Si corpus super curua DMA descenderet, haberetur ista aequatio $dv = -gdx + Rds$, (470.) ex qua intelligitur ascensum non esse similem descensui, vt in vacuo. Sed si resistentia fieret negatiua seu accelerans, tum ascensus similis foret descensui. Quare descensus in medio resistente congruet cum ascensu in medio tantumdem accelerante et viciffim.

Corollarium 3.

478. Quoniam aequatio pro ascensu hoc tantum differt ab aequatione pro descensu, quod resistentia R valorem induat negatiuum; intelligitur iisdem casibus, quibus aequatio pro descensu

fit feparari vel integrari poteft, iisdem quoque aequationem pro afcenfu fimili modo tractari poffe.

Corollarium 4.

479. Si fuerit $R = \frac{v}{K}$, erit pro afcenfu fuper curua AM haec aequatio $dv = -g dx - \frac{v ds}{K}$. At pro defcenfu habetur $dv = -g dx + \frac{v ds}{K}$. Quare fi illa aequatio poterit integrari fimul quoque huius aequationis habebitur integrale ponendo tantum $-K$ loco K.

Scholion.

480. Secundum tres igitur cafus fupra memoratos, quibus aequatio inuenta vel feparari vel integrari poteft, tam defcenfum quam afcenfum pertractabimus, fi fcilicet detur curua fuper qua motus fieri ponitur. Deinde autem ex datis potentia follicitante, refiftentia et preffione curuam inueftigabimus. Tertio fi motus quaedam proprietas fuerit propofita, curuam determinabimus, quae in data refiftentiae hypothefi fatisfaciat. Praeterea fequentur alia problemata, in quibus harum quatuor rerum refiftentiae, motus, preffiones et curuae duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habebimus deinceps quoque problemata indeterminata, quibus omnes curuae requiruntur, fuper quibus corpus defcendens vel eandem celeritatem acquirit vel eas eodem tempore abfoluit

Tum ſequetur doctrina de lineis brachyſtochronis, atque tandem caput concludet de motu oſcillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55.

Problema.

Tabula XII. Fig. 3.

481. *In medio reſiſtente vniformi quocunque et hypotheſi grauitatis vniformis* g, *determinare motum corporis deſcendentis ſuper linea recta* AMB *ad horizontem vtcunque inclinata.*

Solutio.

Poſita $AP = x$ erit $AM = s = nx$; et quia medium reſiſtens eſt vniforme, erit reſiſtentia $R = \frac{V}{K}$. Poſita ergo altitudine celeritati in M debita $= v$, erit $dv = g\,dx - \frac{nV\,dx}{K}$ (465.). Vnde fit $\frac{K\,dv}{gK - nV} = dx$, in qua aequatione indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae: erit ergo $x = \int \frac{K\,dv}{gK - nV}$, in qua integratione efficiendum eſt vt poſito $x = o$ fiat $v = o$, ſi quidem deſcenſus in A ex quiete incipiat. Sin vero habeat celeritatem initialem haec per integrationem eſt introducenda. Tempus per ſpatium AM eſt $= \int \frac{n\,dx}{\sqrt{v}}$. Poſito ergo loco dx eius valore in v, habebitur tempus per $AM = \int \frac{nK\,dv}{(gk - nV)\sqrt{v}}$ quod integrale ita eſt ſumendum, vt poſita $\sqrt{v} =$ celeritati initiali in A euaneſcat. Preſſio vero quam linea in quouis puncto M ſuſtinet, eſt

eſt conſtans nempe aequalis vi normali $= \frac{gdy}{ds} = \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$, quia vis centrifuga euaneſcit ob $ddy = o$. Q. E. I.

Corollarium 1.

482. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu eſt $gK > nV$. At ſi ſemel fuerit $gK = nV$ corpus neque accelerabitur neque retardabitur. Diminuetur vero corporis celeritas ſi in initio A fuerit $nV > gK$.

Corollarium 2.

483. Si ergo corpus in A deſcenſum a quiete incipiat motus perpetuo creſcet, ita tamen vt ſemper ſit $gK > nV$, quippe quae eſt vltima celeritas, quam deſcenſu per infinitum ſpatium demum acquirit.

Corollarium 3.

484. Quo maior ergo eſt angulus BAC, eo minor eſt vltima, quam corpus acquirere poteſt celeritas. Maximam vero celeritatem vltimam, qua aequabiliter progreditur, acquirit deſcenſu ſuper recta verticali AC.

Corollarium 4.

485. Si reſiſtentia fuerit vt poteſtas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ et $K = k^m$, vnde

ista habebitur aequatio $x = \int \frac{k^m\, dv}{g k^m - n v^m}$, atque tempus per AM $= \int \frac{n k^m\, dv}{(g k^m - n v^m)\sqrt{v}}$.

Exemplum 1.

486. Resistat medium in simplici ratione celeritatum, erit $2m = 1$, atque $dv = g\,dx - \frac{n\,dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$: vel per seriem $x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$ etc. si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Tempus autem per spatium AM erit $= \int \frac{n\,dv\sqrt{k}}{g\sqrt{kv} - nv} = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$. Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit $nx + 2\sqrt{kv} = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$. Atque in serie $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}}$ + etc. Si ergo corpus in descensu per AB acquisiuit celeritatem altitudini b debitam, ex hac reperitur altitudo AC $= -\frac{2\sqrt{bk}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

478. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$ et $x = \int \frac{k\,dv}{gk - nv} = \frac{k}{n}\, l \frac{gk}{gk - nv}$, si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoauerit. Quare si e sit numerus, cuius logarithmus est vnita, erit $e^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv}$; atque $v =$

gk

$\frac{gk(e^{\frac{nx}{k}}-1)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n}(1 - e^{\frac{-nx}{k}})$. Hanc ob rem ſi corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit $AC = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk-nb}$. Atque ſi corpus per ſpatium infinitum deſcendat, habebit celeritatem altitudini $\frac{gk}{n}$ debitam. Tempus vero per ſpatium AM erit $= \int \frac{nkdv}{(gk-nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$. Per ſeries tam ſpatium x, quam tempus commode exprimitur; id quod generaliter pro quouis valore litterae m in ſequente exemplo monſtrabimus.

Exemplum 3.

488. Sit reſiſtentia vt poteſtas exponentis $2m$ celeritatum, erit $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$; quae expreſſio in ſeriem conuerſa dat $dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m} dv}{g^3 k^{2m}} +$ etc. Ex qua inuenitur $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{n^3 v^{3m+1}}{(3m+1)g^4 k^{3m}} +$ etc. Atque ſi ponatur tempus per AM $= dt$, quia eſt $dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}}$ erit $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m} \sqrt{v}}{(4m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{2n^4 v^{3m} \sqrt{v}}{(6m+1)g^4 k^{3m}}$ + etc.

PROPOSITIO 56.

Problema.

Tabula XII. Fig. 4.

489. *Resistat medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum; datumque sit punctum* A, *ex quo infinitae rectae* AM *sint eductae: determinare curuam* CMD *huiusmodi, vt corpus per quamlibet rectam* AM *descendens in puncto* M *eandem habeat celeritatem.*

Solutio.

Sit $2m$ exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, dicaturque $AP = x$ et $AM = z$, et ponatur $z = nx$. Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, quae debet esse constans scilicet $= b$. Erit ergo $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ (485.) denotante, vt supra k exponentem resistentiae, et g potentiam sollicitantem deorsum tendentem. Ad naturam curuae CM ergo inueniendam oportet integrare aequationem $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ ita vt posito $v = o$ fiat quoque $x = o$; tum autem poni b loco v atque $\frac{z}{x}$ loco n, hocque modo obtinebitur aequatio inter x et z naturam curuae exponens. Per seriem autem supra aequationem propositam integrauimus (488), vnde posito b loco v habebimus $x = \frac{b}{g} +$

nb

$\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ + etc. Ponatur q^m loco n et multiplicetur vbique per q, quo facto habebimus $qx = \frac{bq}{g} + \frac{b^{m+1}q^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}q^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ + etc. Sumantur differentialia et diuidatur per bdq habebitur $\frac{qdx+xdq}{bdq} = \frac{1}{g} + \frac{b^mq^m}{g^2k^m} + \frac{b^{2m}q^{2m}}{g^3k^{2m}} = \frac{k^m}{gk^m - b^mq^m}$, seu $qdx + xdq = \frac{bk^mdq}{gk^m - b^mq^m}$. At quia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$ ponatur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco q et prodibit $z^{\frac{m-1}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz +$

$$(m-1)z^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx = \frac{bk^mz^{\frac{1-m}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz - bk^mz^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx}{gk^mx - b^mz}.$$

Quae multiplicata per $x^{\frac{1}{m}}z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc $xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^mxdz - bk^mzdx}{gk^mx - b^mz}$. Constructio autem curuae facilius sequitur ex aequatione $qx = \int \frac{bk^mdq}{gk^m - b^mq^m}$. Supra autem habuimus seriem ipsi qx aequalem, ex qua patet si fuerit $q^m = \frac{gk^m}{b^m}$, tum $\frac{gx}{b}$ aequari seriei harmonicae

1+

$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1}$ etc. ideoque esse x infinitum. Si igitur x est infinitum, erit $q^m = \frac{z}{x} = \frac{gk^m}{b^m}$, ex quo perspicitur rectam AE fore curuae asymtoton et cosinum ang. CAE fore $= \frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curuae C a puncto A distantia AC aequalis erit huic seriei $\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Debet autem esse necessario $b^m < gk^m$, alias enim vertex C a puncto A infinite distaret. Q. E. I.

Corollarium 1.

490. Si applicata PM vocetur y, erit $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ et $dz = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis habebitur $xydy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^my(xdy-ydx)}{gk^mx-b^m\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

Corollarium 2.

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$, transmutabitur ista aequatio in hanc $xpdp + mdx + mp^2dx = \frac{bk^mpdp}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}}$, quae aequatio per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$

mul-

multiplicata, fit integrabilis, habebitur enim $m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m p\,dp(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}}{gk^m - b^m V(1+pp)}$, quae expressio per quadraturas effici potest.

Corollarium 3.

492. Si resistentia euanescat, corpusque in vacuo moueatur fit k infinitum; atque ex supra data serie inuenitur $qx = \frac{bq}{g}$ seu $x = \frac{b}{g}$, vnde cognoscitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

Scholion I.

493. Quia autem ex hac aequatione generali parum ad cognitionem curuae potest concludi, in exemplis specialibus hanc disquisitionem vlterius prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in quibus formula $\frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$ integrationem saltem per logarithmos admittit, quo ad expressiones finitas perueniamus, ex quibus facile erit curuae naturam perspicere.

Exemplum I.

494. Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$. Ponatur $AC = a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debita esse debet altitudini b erit $a = -$

$2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$ (486.). Deinde vero erit $\sqrt{q} = \frac{z}{x}$ seu $q = \frac{z^2}{x^2}$, atque $q\,x = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quod integrale ita est accipiendum vt posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel eius valori assignato. Erit ergo $qx = -2\sqrt{bkq} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quae aequatio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc $z^2 = -2z\sqrt{bk} + 2gkx\, l\frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k}-z\sqrt{b}}$ Si $q = 1$ fit $x = a = -2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. Fiat autem $q = 1 + dq$ habebitur $dx + xdq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. At quia $\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC erit $\sqrt{dq} =$ sinui huius anguli. Quamobrem incrementum ipsius x infinities minus est, quam incrementum anguli MAC, incidente MA in CA, ex quo sequitur tangentem curuae in C esse horizontalem: huiusque curuae tangens in infinito seu asymtota erit AE existente ang. EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curua ex altera verticalis AC parte arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

Scholion 2.

495. Generaliter quidem etiam ostendi potest curuae tangentem in C esse debere horizontalem. Posita enim $n = 1$, in serie x exprimente habetur $AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} +$ etc. augeatur n elemento dn habebitur incrementum momentaneum ipsius $AC = \frac{b^{m+1}\,dn}{(m+1)g^2k^m} +$

2. b

$\frac{2b^{2m+1}dn}{(m+1)g^2k^{2m}}+$ etc. Eſt vero $\frac{1}{n}$ coſinus anguli MAC, ideoque ſinus $=\frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n}=\sqrt{2dn}$ poſito $1+dn$ loco n. Quamobrem incrementum ipſius AC infinities eſt minus quam incrementum anguli; atque ideo AC normalis erit in curuam DMC.

Exemplum 2.

496. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$; poſitoque AC$=a$ erit $a=$ $kl\frac{gk}{gk-b}$, atque $b=gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$. Deinde vero eſt $q=n=\frac{z}{x}$, atque $qx=z=\int\frac{bkdq}{gk-bq}=kl\frac{gk}{gk-bq}=$ $kl\frac{gkx}{gkx-bz}$. Habebitur ergo $e^{\frac{z}{k}}=\frac{gkx}{gkx-bz}$, vnde ſequitur $x=\frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk(e^{\frac{z}{k}}-1)}=\frac{e^{\frac{z}{k}}z(e^{\frac{a}{k}}-1)}{e^{\frac{a}{k}}(e^{\frac{z}{k}}-1)}$ poſito loco b eius valore in a. Ad curuam autem conſtruendam commodiſſime adhibetur haec aequatio $z=k$ $l\frac{gk}{gk-bq}$, in qua z eſt AM et q eſt ſecans anguli MAC.

Scholion 3.

497. In ſolutione problematis ad inueniendam aequationem curuae CMD vſi fuimus ſeriei cuiusdam ſummatione; eandem vero aequationem

sine seriebus sequente modo elicere licet. Quia est $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$, haecque ipsa aequatio exprimit naturam curuae quaesitae, si post integrationem ponatur $v = b$ et $\frac{z}{x}$ loco n. Quamobrem si $\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ differentietur posito non solum v sed etiam n variabili, atque tum ponatur v constans $= b$ et $\frac{z}{x}$ loco n habebitur aequatio differentialis pro curua quaesita. Ad hoc efficiendum pono $n = \frac{1}{p^m}$, quo prodeat $x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}$. Ponamus breuitatis gratia $\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$, sitque aequatio differentialis haec $dx = Pdv + Qdp$, si etiam p variabilis accipiatur. Quia autem P est functio nullius dimensionis ipsarum v et p erit $x = Pv + Qp$, ideoque $Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}$. Hoc igitur loco Q valore substituto prodibit $pdx = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m - nv^m} + xdp$. Restituatur $n^{-\frac{1}{m}}$ loco p, et orietur $mndx + xdn = \frac{mk^m n dv + k^m v dn}{gk^m - nv^m}$, in qua aequatione n aeque variabilis est assumta ac v et x. Nunc ponatur $v = b$, $dv = 0$ et $n = \frac{z}{x}$ atque habebitur ista aequatio: $xdz + (m-1)zdx =$

b k

$\frac{bk^m(x\,dz - z\,dx)}{gk^m x - b^m z}$, quae cum aequatione supra inuenta congruit.

PROPOSITIO 57.

Problema.

498. *Si resistentia fuerit in quacunque multiplicata ratione celeritatum; inuenire curuam* A M C *huius proprietatis, vt corpus descendens super quavis subtensa* A M *dato tempore ex* A *ad* M *perueniat.*

Tabula XII. Fig. 5.

Solutio.

Ducta verticali AC ponatur $AP = x$, $AM = z$; sitque $n = \frac{z}{x}$. Posita altitudine celeritati in M debita $= v$ et resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$ sit tempus quo corpus per AM descendit $= t$, quod debet esse quantitas constans. Habebimus ergo ex praecedentibus $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ et $t = \int \frac{nk^m dv}{(gk^m - nv^m)\sqrt{v}}$ (385.). Quocirca ad naturam curuae AMC inueniendam, opus est vt vtraque aequatio, si fieri potest, re ipsa integretur, et valor ipsius v ex altera aequatione in altera substituatur, atque tum loco n scribatur $\frac{z}{x}$, quo facto habebitur aequatio inter

x et z naturam curuae quaesitae exprimens. At si integrationes non commode persici poterunt, vtraque aequatio est differentianda ponendo quoque n variabili; et postquam positum est $dt = o$, ex duabus aequationibus inuentis eliminari debet v, quo prodeat aequatio n et x tantum continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curuae quaesitae. Ad hoc ponatur $n = \frac{1}{p^m}$, quo habeamus $x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}$ et $t = \int \frac{k^m dv}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$. Quarum aequationum illius sumto quoque p variabili differentialis iam est inuenta $pdx - xdp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m}$ (497.). Ad alteram aequationem differentiandam pono $\frac{k^m}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} = P$, sitque $dt = Pdv + Qdp$. Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m - \frac{1}{2}$ erit $(\frac{1}{2} - m)\, t = Pv = + Qp$, atque hinc $Q = \frac{(1-2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}$. Quo valore loco Q substituto prodibit $pdt = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} + \frac{(1-2m)tdp}{2}$. Sit nunc $t = 2\sqrt{c}$ atque $dt = o$, habebimus $(2m-1)\, dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$. Eliminetur ex his duabus aequationibus dv et proueniet $pdx - xdp = (2m-1)$

p^m

$p^m dp \sqrt{cv}$ seu $\sqrt{v} = \frac{pdx - xdp}{(2m-1)p^m dp \sqrt{c}} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-2} dp \sqrt{c}}$ posito $x = rp$. Substituatur hic valor loco v in aequatione $(2m-1)\, dp \sqrt{c} = \frac{k^m (pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$ vel in hac $\frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m (pdv - vdp)}{gk^m p^m - v^m}$ Casu quidem quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis erit $pdv = vdp$ seu $v = \alpha p$ et $p = b \div x = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz}$, vnde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac resistentiae hypothesi curua AMC est circulus omnino vt in vacuo. In aliis hypothesibus nisi re ipsa aequatio alterutra integretur eliminata v habebitur aequatio differentio differentialis inter z et x naturam curuae exprimens. Q. E. I.

Corollarium I.

499. Si ponatur $v = up$, erit $pdv - vdp = ppdu$ Atque hinc erit $\sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}} dp \sqrt{c}}$, qui valor substitutus in aequatione $dr = \frac{k^m du}{gk^m - u^m}$ dabit aequationem inter p et r, ex qua aequatio inter x et z formabitur.

Co-

Corollarium 2.

500. In medio ergo quod resistit in simplici celeritatum ratione apparet curuam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resistentiae hypothesi tempora descensuum per singulas circuli chordas ex puncto A ductas sunt inter se aequalia.

Exemplum 1.

501. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$, atque $x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$ seu $v = \frac{gk}{n} (1 - e^{\frac{-nx}{k}})$. Praeterea vero erit $t = 2\sqrt{c} = \frac{nk}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$ seu $e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$, vnde fit $v = \frac{gk(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1)^2}{n(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1)^2}$. Eliminata ergo v et $\frac{z}{x}$ posito loco n habebitur $\frac{e^{\frac{z}{k}} - 1}{e^{\frac{z}{k}}} = \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} - 1)^2}{(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} + 1)^2}$ seu $\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}} = l \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-z}{k}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-z}{k}})}}$. In hac curua est AC $= k\, l \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + 1)^2}{4 e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = k\, l \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2}$, si igitur ponatur

AC

AC$=a$, erit $2e^{\frac{a}{2k}}=e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}+e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}$: vnde erit $e^{\frac{\sqrt{ga}}{\sqrt{k}}}=e^{\frac{a}{2k}}+\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$, seu $\sqrt{\frac{gc}{k}}=l(e^{\frac{a}{2k}}+\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)})$. Erit igitur $\sqrt{x}\,l(e^{\frac{a}{2k}}+\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)})==\sqrt{z}\,l(e^{\frac{a}{2k}}+\sqrt{(e^{\frac{z}{k}}-1)})$ aequatio pro curua AMC. Si resistentia fuerit valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque ideo $e^{\frac{z}{2k}}+\sqrt{(e^{\frac{z}{k}}-1)}=1+\frac{z}{2k}+\sqrt{(\frac{z}{k}+\frac{z^2}{2k^2})}=1+\sqrt{\frac{z}{k}}+\frac{z}{2k}+\frac{z\sqrt{z}}{4k\sqrt{k}}$ huiusque logarithmus erit $=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}}+\frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}$. Simili modo erit $l(e^{\frac{a}{2k}}+\sqrt{e^{\frac{a}{k}}-1}))=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}}+\frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}$. Atque hanc ob rem habebitur pro curua AMC haec aequatio $\sqrt{ax}+\frac{a\sqrt{ax}}{12k}=z+\frac{z^2}{12k}$ seu $ax(1+\frac{a}{6k}+\frac{a^2}{144k^2})=z^2+\frac{z^3}{6k}+\frac{z^4}{144k^2}$ Vnde perspicitur si resistentia prorsus euanescat seu k fiat infinite magnum fore $ax=z^2$ atque ideo curuam AMC circulum. At si medium rarissimum fuerit, erit $ax(a+6k)=6kz^2+z^3$, et differentiando $adx(a+6k)=12kzdz+3z^2dz$. Si nunc fiat $zdz=xdx$ habebitur applicata PM maxima, seu locus vbi tangens curuae est verticalis, scilicet $a^2+6ak=12kx+3xz$ seu $x=\frac{a^2+6ak}{12k+3z}$, vnde fit $\frac{(6ak+a^2)^2}{3}=24k^2z^2+10kz^3+z^4$, ex qua aequatione ipsius z valor quam proxime est $\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{(4\sqrt{2}-5)a^2}{48k}$, atque $x=\frac{a}{2}$ —

$\frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k}$ et $PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}$. Curua ergo latiſſima eſt ſupra medietatem; ibique latior eſt quam altitudo AC.

Corollarium 3.

502. Si igitur linea recta vel curua hanc curuam AMC in M tangat, ita vt tota extra ſpatium AMC ſit ſita, corpus ex A ad eam lineam citius perueniet deſcendendo ſuper chorda AM, quam ſuper quauis alia recta ex A ad eam lineam ducta.

Exemplum 2.

503. Sit m numerus affirmatiuus et reſiſtentia valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque hinc $\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2 k^m}$. Quocirca erit $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m}$ atque $t = 2\sqrt{v}$ $= \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2 k^m}$; hincque prodit v $= gx - \frac{ng^m x^{m+1}}{(m+1)k^m}$, et $\sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}} x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$ atque $v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}} x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}} x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$ His autem valoribus ſubſtitutis prodit iſta aequatio

tio $\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2 g^{m-1} x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3 g^{2m-2} x^{2m}}{(2m+2)k^{2m}}$.
Quia vero eſt $n = \frac{z}{x}$, habebitur iſta aequatio $\sqrt{g}$
$cx = z + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-2} x^{2m-2} z^3}{(2m+2)k^{2m}}$
ſeu $gcx = z^2 + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^3}{(m+1)(2m+1)k^m}$ ſi medium eſt rariſſimum. Vnde patet ſi reſiſtentia penitus euaneſcat fore $z^2 = gcx$ ſeu curuam AMC circulum diametri AC.

Scholion.

504. Si igitur cognita fuerit curua AMC, et detur linea quaecunque determinari poterit recta AM ſuper qua corpus ex A celerrime ad datam lineam pertingat. Scilicet conſtruenda eſt curua AMC, quae datam lineam tangat v. g. in M; eritque recta AM ea recta ſuper qua corpus deſcendendo ex A citiſſime ad lineam datam perveniat. Atque ſimili modo in praecedente problemate ſi recta vel curua tangat curuam CMD in M, corpus ex A deſcendendo per AM vsque ad lineam tangentem curuam CMD maiorem acquiret celeritatem, quam deſcendendo ſuper quavis alia recta ex A ad eam lineam ducta. Ex his igitur ſolui poſſunt problemata, quibus requiritur recta ex A ad datam lineam ducta, ſuper qua corpus deſcendendo vel maximam acqui-

Tabula XII. Fig. 4.

 rat

rat celeritatem, vel citiſſime ad eam lineam pertingat. Quamobrem hisce problematibus non diutius immorabimur, ſed ad aſcenſum ſuper lineis rectis conſiderandum progrediemur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula XII. Fig. 6.

505. *In hypotheſi grauitatis vniformis* g *et medio quocunque reſiſtente vniformi determinare motum corporis data cum celeritate initiali ex* A *aſcendentis ſuper linea recta* AB *vtcunque inclinata ad horizontem.*

Solutio.

Ducta horizontali AC et ex M ad eam perpendiculari MP vocetur $PM = x$, ſitque $AM = nx$. Sit altitudo debita celeritati initiali in $A = b$, et altitudo debita celeritati initiali in $M = v$; reſiſtentia vero in M ſit $= \frac{V}{K}$. His poſitis erit $dv = -gdx - \frac{nVdx}{K}$ (475.), vnde habetur $dx = \frac{-Kdv}{gK + nV}$ atque $x = \int \frac{-Kdv}{gK + nV}$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $v = b$. Si deinde ponatur $v = o$, prodibit $x = BC$, vbi in puncto B corpus omnem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus per AM aſcendit eſt $= \int \frac{-nKdv}{(gK + nV)\sqrt{v}}$ hoc integrali quoque ita accepto, vt euaneſcat poſito $v = b$, in quo ſi

ſi porro ponatur $v = 0$, prodibit tempus totius aſcenſus per AMB. Preſſio autem, quam linea AMB ſuſtinet, vbique eſt conſtans et aequalis vi normali $= \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

506. Si linea AMB fit horizontalis euaneſcente angulo BAC fiet $n = \infty$. Poſito igitur AM $= z = nx$, erit $z = \int \frac{-Kdv}{V}$, et tempus quo per AM progreditur erit $= \int \frac{-Kdv}{V\sqrt{v}}$.

Corollarium 2.

507. Si reſiſtentia fuerit vt poteſtas exponentis $2m$ celeritatum erit $V = v^m$ et $K = k^m$. Hoc ergo caſu erit $x = \int \frac{-k^m dv}{gk^m + nv^m}$, atque tempus per AM $= \int \frac{-nk^m dv}{(gk^m + nv^m)\sqrt{v}}$.

Corollarium 3.

508. Vtraque haec expreſſio in ſeriem conuerſa dat $x = \frac{b-v}{g} - \frac{n(b^{m+1} - v^{m+1})}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2(b^{2m+1} - v^{2m+1})}{(2m+1)g^3 k^{2m}} -$ etc. Atque tempus per AM $= \frac{2n(\sqrt{b} - \sqrt{v})}{g} - \frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}} - v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2 k^m} +$

 2n

$\frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}} - v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. Quamobrem posito $v = 0$ erit $BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. atque tempus totius ascensus per $AB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g_3k^{2m}}$ — etc.

Exemplum I.

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$, atque $x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}$. Hinc erit tota altitudo BC ad quam corpus pertingere valet $= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Tempus vero, quo per AM ascendit est $= \int \frac{-ndv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k}+n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}$. Quare tempus totius ascensus per AMB erit $= 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Si igitur corpus super linea inclinata AC descenderit et celeritate in C acquisita ascendat in CB vsque ad B; sitque $AC = N$. AD et $BC = n$. BE atque celeritas in C debita altitudini b; erit $AD = -\frac{2\sqrt{bk}}{N} + \frac{2gk}{N^2}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$; $AC = -2\sqrt{bk} + \frac{2gk}{N}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (486); $BE = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$; $CB = 2\sqrt{bk} - \frac{2gk}{n}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Atque tempus descensus per $AC = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (cit.) et tempus ascensus per $CB = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Vnde

Tabula XII. Fig 7.

de descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

Corollarium 4.

510. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, vt sit $BE = AD$, est enim in quacunque resistentiae hypothesi, vt ex seriebus (505. et 488.) intelligitur, $BE < \frac{b}{g}$ et $AD > \frac{b}{g}$. Fieri autem potest vt sit $AC = BC$.

Corollarium 5.

511. Effici autem facile potest vt tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB. Fieri scilicet debet $ng\sqrt{k} = Ng\sqrt{k} + Nn\sqrt{b}$, seu $n = \frac{Ng\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}}$. Est igitur $n > N$ seu ang. BCE $<$ ang. ACD. Relatio autem inter N et n pendet a celeritate in puncto C.

Corollarium 6.

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit angulo ACD, seu $N = n$ tempus ascensus per BC minus erit tempore descensus per AC. Atque hoc generaliter locum habet in quacunque resistentiae hypothesi; est enim tempus descensus per AC $> \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus per CB $< \frac{2n\sqrt{b}}{g}$, vt ex seriebus supra datis (488. et 508.) apparet.

Exem-

Exemplum 2.

Tabula XII. Fig. 6.

513. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$. Quare habebitur $x = \int \frac{-kdv}{gk+nv} = \frac{k}{n}\, l \frac{gk+nb}{gk+nv}$ atque $BC = \frac{k}{n}\, l \frac{gk+nb}{gk}$, et $AB = k\, l \frac{gk+nb}{gk}$ Tempus vero ascensus AM erit $= \int \frac{-n\,kdv}{(gk+nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ (A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$ − A. tang. $\sqrt{\frac{nv}{gk}}$) existente radio $= 1$, et A denotante arcum circuli. Erit ergo tempus ascensus per $AB = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ A tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$

Tabula XII. Fig. 7.

Si nunc corpus super linea inclinata AC descenderit, et celeritate in C acquisita, quae debita sit altitudini b rursus ascendat per CB, fueritque $AC = N.\,AD$ et $BC = n.\,BE$, erit $AD = \frac{k}{N}\, l \frac{gk}{gk-Nb}$ et $AC = k\, l \frac{gk}{gk-Nb}$, atque tempus descensus per $AC = \frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}}\, l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{Nb}}{\sqrt{gk}-\sqrt{Nb}}$ (487.). Porro vero erit $BE = \frac{k}{n}\, l \frac{gk+nb}{gk}$; $BC = k\, l \frac{gk+nb}{gk}$ et tempus ascensus per $CB = \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}$ A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$.

Corollarium 7.

514. In hac resistentiae hypothesi commode effici potest, vt sit $AC = BC$: debebit enim esse $ngk = Ngk + Nnb$, seu $n = \frac{Ngk}{gk-Nb}$. Est igitur $n > N$ hincque ang. $BCE < ACD$.

Exemplum 3.

515. Sit resistentia quam minima et proportionalis potestati $2m$ celeritatum, erit k quantitas vehe-

vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit debita altitudini b et $AC = N.AD$ atque $BC = n.BE$, corpusque super AC descendat et super CB ascendat; erit $AD = \frac{b}{g} + \frac{Nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$; et tempus descensus per $AC = \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$ (488.). Pro ascensu vero erit $BE = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$ et tempus per $CB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$ (508). Si igitur effici debeat vt sit $AC = BC$, oportet esse $N + \frac{N^2b^m}{(m+1)gk^m} = n - \frac{n^2b^m}{(m+1)gk^m}$, vnde fit $n = N + \frac{2N^2b^m}{(m+1)gk^m}$, propter quantitatem k valde magnam. At quo tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB, debet esse $N + \frac{N^2b^m}{(2m+1)gk^m} = n - \frac{n^2b^m}{(2m+1)gk^m}$, seu $n = N + \frac{2N^2b^m}{(2m+1)gk^m}$.

Scholion I.

516. In casu huius exempli, quo resistentia est valde parua, curua AMD potest determinari huius

Tabula XII. Fig. 8.

huius proprietatis, vt corpus ex C celeritate altitudini b debita afcendendo fuper quauis recta CM ad curuam AMD pertingat. Pofita enim CM$=z$, et MP$=x$, erit $n=\frac{z}{x}$ atque $x=\frac{b}{g}-\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$. Quare habebitur ifta aequatio $b^{m+1}z=(m+1)gbk^mx-(m+1)g^2k^mx^2$. Sit CP$=y$ et loco $\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$ fcribatur f orietur $f\sqrt{(x^2+y^2)}=bx-gx^2$ feu $ffyy=(bb-ff)xx-2gbx^3+g^2x^4$. Si ponatur $y=o$, erit et $x=o$ et $x=\frac{b-f}{g}=$ CA. Curua ergo etiam per punctum C tranfit, quae autem eius pars quaeftioni fatisfacere ceffat, propter fequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur fi n feu $\frac{z}{x}$ fit quoque valde magnum. Aequatio vero dat curuam ellipfiformem maxime oblongam circa axem minorem AC defcriptam. Vera autem curua habet formam AMD, cuius afymtotos eft horizontalis CE, fi quidem eft $m>1$, eiusque aequatio habetur omnibus fumendis terminis, quae erit $xdz+(m-1)zdx=\frac{bk^m(zdx-xdz)}{gk^mx+b^mz}$. Si $m<1$ curua non in infinitum progredietur, fed incidet in CE fumendo CE$=\frac{bk^m}{(1-m)b^m}$. Nam fi $m<1$ corpus horizontaliter non in infinitum progredi poteft, fed in diftantia finita omnem amittit celeritatem.

Scho-

Scholion 2.

517. Si medium refiftens non fit vniforme, tum linea non effet recta, fuper qua motus facillime determinari poffet: idem quoque eft notandum fi potentia follicitans non fuerit vniformis. Vt fit potentia follicitans $= P$ et refiftentia $= \frac{v}{Q}$, vbi Q talis eft functio exponentis refiftentiae variabilis q, qualis V eft ipfius v: His pofitis motus corporis fuper quacunque curua exprimitur hac aequatione $dv = \pm Pdx \pm \frac{Vds}{Q}$. Eius ergo curuae, fuper qua motus facillime definitur, haec erit aequatio $PQdx = Ads$, ex qua oritur fequens $\frac{Adv}{\pm A \pm V} = Pdx$, motum fuper hac curua determinans, in qua indeterminatae funt a fe inuicem feparatae. Quare fi etiam huiusmodi hypothefes perfequi vellemus, loco linearum rectarum huiusmodi curuas hac aequatione expreffas $PQdx = Ads$ affumere deberemus. Sed quia ftatuimus hypothefin potentiae follicitantis et refiftentiae vniformis tantum fufius pertractare, miffis his ad eos cafus progredimur, in quibus v vnicam tantum habet dimenfionem, id quod euenit, fi refiftentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROPOSITIO 59.

Problema.

518. *In hypothefi grauitatis vniformis* g, *et refiftentiae quadratis celeritatum proportionalis defcendat*

Tabula XII. Fig. 1.

dat corpus super curua quacunque AMB; *determinare eius motum et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.*

Solutio.

In axe verticali sumatur abscissa $AP = x$ et ponatur arcus $AM = s$, celeritas in M debita altitudini v et exponens resistentiae k, erit resistentia $= \frac{v}{k}$. Quamobrem ista habebitur aequatio motum corporis exponens $dv = g\,dx - \frac{v\,ds}{k}$ (465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ eritque integralis $e^{\frac{s}{k}} v = \int e^{\frac{s}{k}} g\,dx$. Ita autem sumi debet hoc integrale, vt posito $s = o$, abeat v in altitudinem celeritati initiali in A debitam. Si igitur descensus ex quiete fieri ponatur, $e^{\frac{s}{k}} g\,dx$ ita debet integrari vt euanescat posito $s = o$. Hoc itaque facto erit $v = g\,e^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$. Vnde tempus per AM erit $= \int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{g \int e^{\frac{s}{k}} dx}}$. Posito nunc $PM = y$ sumtoque dx constante, erit pressio, quam curua in M secundum normalem MN sustinet $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2g\,e^{\frac{-s}{k}} dx\,ddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

519. Pressio, quam curua sustinet in hanc formam potest transmutari $\frac{g\,ds}{e^{-\frac{s}{k}}dy\,dx}$ — d. $\frac{dy^2\int e^{\frac{s}{k}}}{ds^2}$ dx, quae, postquam pro data curua integratum est $e^{\frac{s}{k}}dx$, commodius ad quosuis casus accommodatur.

Corollarium 2.

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, vbi est $v = \frac{gk\,dx}{ds}$. Hoc vero euenit vbi est $e^{\frac{s}{k}}k\,dx = ds\int e^{\frac{s}{k}}dx$, seu vbi d. $l\int e^{\frac{s}{k}}dx = \frac{ds}{k}$, in quo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

Corollarium 3.

521. Si fuerit $\int e^{\frac{s}{k}}dx = \frac{e^{\frac{s}{k}}s^n}{a^{n-1}}$, erit $dx = \frac{ns^{n-1}ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n ds}{a^{n-1}k}$ atque $x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n-1}k}$. Quare si haec aequatio exprimat curuae quaesitae naturam, erit $v = \frac{gs^n}{a^{n-1}}$ et tempus per A M $= \frac{2a^{\frac{n-1}{2}}s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\sqrt{g}}$ si quidem n fuerit minor binario;

nam si $n=2$ vel $n>2$, curua in A tangentem horizontalem habebit, atque corpus ibi perpetuo permanebit.

Corollarium 4.

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fuerit potestas quaecunque ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper integrari posse $e^{\frac{s}{k}}dx$ atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

Corollarium 5.

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sumantur et celeritas, quam corpus in B habebit debita sit altitudini b; praetereaque vocetur BQ $=x$ et BM$=s$, erit $dv=-g\,dx+\frac{v\,ds}{k}$, cuius integralis est $e^{\frac{-s}{k}}v=b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ ita accepto vt euanescat posito $x=o$. Hanc ob rem erit $v=be^{\frac{s}{k}}-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, et tempus, quo in descensu arcus MB absoluitur $=$ $\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$.

Corollarium 6.

524. Si igitur detur celeritas in puncto B nempe $\sqrt{b}$, inueniri potest in curua BMA punctum A, ex quo descendere incepit, vbique celeritatem ha-

habuit $=o$. Quaeri debet fcilicet locus, vbi eft $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g}$. Atque etiam expreffio temporis $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$ dabit tempus totius defcenfus per AMB, fi poft integrationem ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{b}{g}$.

Scholion.

525. Duplicem hic motum inueftigandi modum ideo attulimus, vt tam ad defcenfus ex dato puncto factos, quam ad defcenfus vsque ad datum punctum, vt in motu ofcillatorio fieri folet, accommodari poffit.

PROPOSITIO 60.

Problema.

526. *Exiftente potentia follicitante vniformi et medio vniformi refiftente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis afcendentis fuper data curua* AMD, *et preffionem quam curua fuftinet in fingulis punctis M.*

Tabula XII. Fig. 2.

Solutio.

In linea verticali AP ponatur abfciffa $AP = x$, arcus $AM = s$; celeritas in A debita altitudini b, et celeritas in M altitudini v. Sit potentia follicitans deorfum $= g$ et refiftentia $= \frac{v}{k}$. His pofitis erit $dv = -g\,dx - \frac{v\,ds}{k}$ (475.), quae multiplicata

cata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale $e^{\frac{s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx$ ita sumto $\int e^{\frac{s}{k}}dx$ vt euanescat posito $x = o$. Hanc ob rem erit $v = e^{\frac{-s}{k}}b - ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$, atque tempus ascensus per arcum $AM = \int \frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx)}}$. Ex inuenta celeritate habebitur pressio, quam curua in M secundum normalem MN patitur, $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (475), posito $PM = y$ et sumto dx pro constante. Q. E. I.

Corollarium 1.

527. Posito ergo $v = o$, erit $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$, ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quousque corpus ex A ascendere poterit. Atque tempus totius ascensus per AMD habebitur, si in expressione temporis ponatur $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$.

Corollarium 2.

528. Si in formula pressionem exhibente loco v eius valor inuentus substituatur, habebitur

$$\frac{-2e^{\frac{-s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{\frac{-s}{k}}dxddy\int e^{\frac{s}{k}}dx}{ds^3}$$

Quae transmutari potest in hanc formam —

$$\frac{2e^{\frac{-s}{k}}bdx\,ddy}{ds^3} + \frac{g\,ds}{e^{\frac{s}{k}}dy\,dx}\,\mathrm{d}.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}dx.$$

Corollarium 3.

529. Pro descensu vero, si celeritas in A debita quoque est altitudini b, pressio quam curua in M secundum normalem MN sustinet est $= -$

$$\frac{2e^{\frac{s}{k}}bdx\,ddy}{ds^3} + \frac{ge^{\frac{s}{k}}ds}{dy\,dx}\,\mathrm{d}.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{-s}{k}}dx.$$

Corollarium 4.

530. Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, aequatio ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus scribendo $-k$ loco k; atque vicissim. Quare si super curua AM descensus fuerit determinatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

Scholion.

531. Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter se habent affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari, atque ideo oscillationes super data curua determinari. Id quod in sequente propositione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

PROPOSITIO 61.

Problema.

Tabula XII. Fig. 9.

532. *Sint curuae quaecunque* MA *et* NA *in infimo puncto* A *coniunctae, atque corpus descendat super curua* AN *in medio resistente vniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare descensum super curua* MA *et ascensum super curua* AN.

Solutio.

Sit celeritas in puncto A debita altitudini b; atque in axe verticali AP abscissa AP $=x$, arcus AM $=s$. Pro curua ascensus AN vero sit AQ $=t$ et AN $=r$. His positis erit corporis descendentis celeritas in M debita altitudini $e^{\frac{s}{k}}b-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. (523.) Corporis vero ascendentis super curua AN celeritas in N debita est altitudini $e^{\frac{-r}{k}}b-ge^{\frac{-r}{k}}\int e^{\frac{r}{k}}dt$ (526). Quare si celeritates in M et N euanescant, ita vt MAN sit arcus vna semioscillatione descriptus erit $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ et $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{r}{k}}dt$. Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum m An absoluens, in qua celeritas in puncto A debita sit altitudini $b+db$, erit $\frac{b+db}{g}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx+e^{\frac{-s}{k}}dx$, hincque $e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{db}{g}$, seu $e^{\frac{-AM}{k}}.Pp=\frac{db}{g}$. Similiter pro ascensu erit $e^{\frac{AN}{k}}.Qq=\frac{db}{g}$. Ex quibus

bus fiet $\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM+AN}{k}}$, seu $l Pp - l Qq = \frac{AM+AN}{k}$. Dato ergo arcu MAN vna semioscillatione descripto, si corpus in puncto proximo superiore m descendere incipiat, inuenietur punctum n ad quod supra N pertinget: erit nempe $Qq = \frac{Pp}{e^{\frac{AM+AN}{k}}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

533. Si igitur MAN et mAn fuerint duo arcus oscillationibus proximis descripti, erit semper $Qq < Pp$, eoque minus erit Qq quam Pp, quo maior fuerit summa arcuum $AM+AN$. Semper igitur quoque erit AQ minor quam AP.

Corollarium 2.

534. In vacuo, quia est $k = \infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1$; fietque $Qq = Pp$, atque hinc $AQ = AP$. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitudinem, quanta erat illa ex qua descendit.

Corollarium 3.

535. Si resistentia fuerit valde parua, ideoque k vehementer magnum, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1 + \frac{MAN}{k}$. Quare hoc casu erit $Qq + \frac{MAN.Qq}{k} = Pp$, atque $Qq = \frac{Pp(k - MAN)}{k}$.

Corollarium 4.

536. Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam habet celeritatem, ibique ponatur $AO = s$, $AS = x$, erit $\frac{gkdx}{ds} = e^{\frac{s}{k}}b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$, seu $b = g \int e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdx}{ds}$. Quare si corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o, existente $db = g e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdy}{p}$ existente $dy = ov$ et radio osculi in puncto O, seu $\frac{db}{g} = e^{\frac{-AO}{k}} Ss + \frac{kov}{p}$.

Corollarium 5.

537. Tempus vnius itus per MAN habetur, si in integralium summa $\int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx)}} + \int \frac{e^{\frac{r}{2k}} ds}{\sqrt{(b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt)}}$ ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \xi$ atque $\int e^{\frac{r}{k}} dt = \frac{b}{g}$. Sicque prodibit tempus vnius semioscillationis.

Corollarium 6.

538 Ex dictis alia elegans sequitur proprietas, vt si corpus ex A celeritate $\sqrt{b}$ ascendat ad N atque ex N iterum decidat per NA sitque celeritas quam tum in A habebit debita altitudini c. Dein-

Deinde ex A celeritate altitudini $b+db$ debita ascendat pertingatque ad n, vnde rursus descendendo in A acquirat celeritatem altitudini $c+dc$ debitam. Erit ergo $\frac{db}{g}=e^{\frac{AN}{k}}.Qq$ et $\frac{dc}{g}=e^{\frac{-AN}{k}}.Qq$. Atque $Qq^2=\frac{db.dc}{g^2}$, vel etiam $\frac{db}{dc}=e^{\frac{2AN}{k}}$.

Scholion.

539. Restat vt haec generalia ad exempla seu datas curuas accommodemus, quo vsus eorum eo magis pateat. Accipiemus autem pro curua data cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}}dx$ in ea facile possit exhiberi, et aequatio quoque inter s et x sit algebraica. Inuestigabimus ergo tam descensus super cycloide factos, quam oscillationes, quo appareat, quantum oscillationes, quae in cycloide fiunt, ab isochronismo discrepent; quippe quae in vacuo omnes eodem tempore absolui sunt demonstratae.

PROPOSITIO 62.

Problema.

540. *Sit curua data cyclois* ACB *super basi horizontali* AB *prouolutione circuli diametri* CD *descripta; corpusque super ea ex* A *descendat in medio resistente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum corporis descendentis.* Tab. XIII. Fig. 2.

Solutio.

Posita $2CD=a$, $AL=x$, et $AM=s$ erit ex natura cycloidis $s=a-\sqrt{(a^2-2ax)}$ seu $2ax=2as-ss$. Celeritas vero in M debita sit altitudini v, erit $v=ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$. Quia autem est $dx=ds-\frac{sds}{a}$, erit $\int e^{\frac{s}{k}}dx=ke^{\frac{s}{k}}+\frac{k^2e^{\frac{s}{k}}}{a}-\frac{ke^{\frac{s}{k}}s}{a}-k-\frac{k^2}{a}=e^{\frac{s}{k}}\left(\frac{ak+k^2-ks}{a}\right)-\frac{ak-k^2}{a}$. Quo valore substituto erit $v=\frac{gak+gk^2-gks}{a}-\frac{ge^{\frac{-s}{k}}(ak+k^2)}{a}$. Maxima corporis erit celeritas vbi est $v=\frac{gkdx}{ds}=\frac{gak-gks}{a}$; hoc igitur accidit vbi est $e^{\frac{s}{k}}k=a+k$ seu $s=kl\frac{a+k}{k}$. Inueniri etiam potest punctum N in quo corpus omnem celeritatem perdit faciendo $v=o$ seu $e^{\frac{s}{k}}=\frac{a+k}{a+k-s}$ seu $s=kl\frac{a+k}{a+k-s}$, ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN. Tempus quo arcus AM descensu absoluitur est $=\int\frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k))}}$. Deinde ad pressionem inueniendam est $\frac{dy}{ds}=\frac{\sqrt{(2as-ss)}}{a}=\frac{\sqrt{2ax}}{a}$, vnde pressio ipsa in puncto M prodit $=\frac{g\sqrt{2ax}}{a}+\frac{2gak+2gkk-2gks}{a\sqrt{2ax}}-\frac{2gak-2gkk}{e^{\frac{s}{k}}a\sqrt{2ax}}$

De-

Determinauimus ergo celeritatem, et tempus, et pressionem, vnde motus corporis innotescit. Q.E.I.

Corollarium 1.

541. Quia est $e^{\frac{-s}{k}} = 1 - \frac{s}{1.k} + \frac{s^2}{1.2k^2} - \frac{s^3}{1.2.3k^3}$ $+$ etc. si ponatur $a + k = c$ seu $a = c - k$ erit $\frac{(c-k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3k^3} -$ etc. $= \frac{as}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3k^3} -$ etc. Quare erit $v = \frac{gs}{a}\left(\frac{a}{1} - \frac{s}{1.2} - \frac{as}{1.2k} + \frac{(a+k)s^2}{1.2.3k^2} - \frac{(a+k)s^3}{1.2.3.4k^3} + \text{etc.}\right)$

Corollarium 2.

542. In vacuo igitur, vbi k est infinitum, erit $v = gs - \frac{gs^2}{2a} = gx$, vt constat. At si resistentia tantum sit valde parua et propterea k valde magnum erit $v = gs - \frac{gs^2}{2a} - \frac{gs^2}{2k} + \frac{gs^3}{6ak}$.

Corollarium 3.

543. In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis vbi est $s = o$ et $s = 2a$, i. e. in duobus cuspidibus A et B. In medio vero resistente alter locus est $s = o$, alter vero ex hac aequatione erui debet $a = \frac{cs}{1.2k} - \frac{cs^2}{1.2.3k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3.4k^3}$ $-$ etc. vnde inuenitur $s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{13a^3k}{9c^3} + \frac{196a^4k}{135c^4} +$ etc. Si igitur k fuerit valde magnum erit $s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k}$ quam proxime.

Co-

Corollarium 4.

544. Eadem haec feries inuenta fubftituto $a+k$ loco c transformatur in hanc $s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} - \frac{119a^4}{135k^3} +$ etc. ex qua valor ipfius s dat arcum ACN, quo vsque corpus motu fuo peruenire poteft.

Corollarium 5.

545. Arcus AO ab A vsque ad O, vbi corpus maximam habet celeritatem, eft $= kl\frac{a+k}{k} = a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2} - \frac{a^4}{4k^3} + \frac{a^5}{5k^4} -$ etc. Quare erit arcus $ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{4a^3}{9k^2} -$ etc. $OC = \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3} -$ etc. et $-AO + ON = \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{9k^2}$.

Corollarium 6.

546. Celeritas vero in puncto C reperitur debita altitudini $= \frac{gk^2 - ge^{\frac{-a}{k}}(ak+kk)}{a} = g\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1.3k} + \frac{a^3}{1.2.4.k^2} - \frac{a^4}{1.2.3.5k^3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.6k^4} - \text{etc.}\right)$. Vnde perfpicitur celeritatem in C nunquam poffe effe euanefcentem; nam altitudo huic celeritati debita eft $= \frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}}a}\left(e^{\frac{a}{k}} - 1 - \frac{a}{k}\right)$, atque $e^{\frac{a}{k}}$ femper maius eft quam $1 + \frac{a}{k}$; exceffus autem maior eft quam $\frac{a^2}{2k^2}$. Quare altitudo debita celeritati in C ma-

maior eſt quam $\frac{ga}{2c^{\frac{a}{k}}}$, ideoque ACN maior eſt quam AC.

Corollarium 7.

547. Altitudo debita celeritati maximae in O eſt $= gk - \frac{gk^2}{a} l \frac{a+k}{k} = g(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \frac{a^4}{5k^3} +$ etc.). Quare exceſſus huius altitudinis ſupra altitudinem celeritati in C debitam eſt $= g(\frac{a^3}{1.2.4k^2} - \frac{5a^4}{1.2.3.5k^3} + \frac{2.3a^5}{1.2.3.4.6.k^4} -$ etc.) $= ge^{\frac{-a}{k}}(\frac{a^3}{8k} + \frac{a^4}{24k^2} +$ etc. Haec nempe expreſſio obtinetur, ſi in generali valore ipſius v ſubſtituatur $k l \frac{a+k}{k}$ loco s, quippe cui quantitati arcus AO eſt aequalis.

Scholion.

548. In ſolutione huius propoſitionis conſiderandum venit, quod ex formula deſcenſum tantum determinante etiam aſcenſum corporis ſuper arcu CN deriuauimus; ex quo dubium oriri poteſt, an iſte aſcenſus legitime ſit definitus. Hoc autem ex ipſa formula aſcenſum determinante facile perſpicitur. Vſi enim fuimus formula hac $dv = gdx - Rds$, quae puncto M vltra punctum C cadente propter dx factum negatiuum abit in hanc $dv = -gdx - Rds$, quae reuera naturam aſcenſus continet. Ex his intelligitur continuitas inter aſcenſum et deſcenſum, qua nullo interiecto

 ſaltu

faltu inter fe cohaerent. Vbi enim curua fe furfum flectere incipit, ibi fimul formula defcenfui inferuiens transmutatur fponte in formulam afcenfus. Atque haec connexio locum habet in medio quocunque refiftente, vti ex generalibus formulis apparet, quae tantum figno ipfius dx difcrepant. Quamobrem data aequatione pro curua quacunque, non eft neceffe vt inquiratur, fuper quanam parte corpus afcendat defcendatve, fed alterutra formula ad aequationem accommodata verum dabit motum fuper curua propofita. Hoc tantum eft tenendum, vt abfciffae in axe verticali capiantur, atque ea formula fiue afcenfus fiue defcenfus adhibeatur, quae cum motus initio congruat.

PROPOSITIO 63.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

549. *Sit curua data* ACB *cyclois fuper bafi horizontali* AB *defcripta et deorfum fpectans, corpusque fuper ea ofcillationes peragat in medio refiftente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum ofcillatorium.*

Solutio.

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$, in eaque fumatur abfciffa $CP = x$, et arcus CM vocetur s, erit ex natura cycloidis $s = \sqrt{2ax}$ et $x = \frac{ss}{2a}$ atque $dx = \frac{sds}{a}$. Defcendat nunc corpus fuper arcu

cu MC, fitque eius celeritas in C debita atitudini b, erit altitudo debita celeritati in M $= e^{\frac{s}{k}}b - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ (523.). Eft vero $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \int \frac{e^{\frac{-s}{k}}sds}{a} = \frac{k^2 - k^2e^{\frac{-s}{k}} - ke^{\frac{-s}{k}}s}{a}$; quare altitudo debita celeritati in M eft $= \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab - gk^2) + gk^2 + gks}{a} = e^{\frac{s}{k}}b - \frac{g}{a}(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2.3\,k} + \frac{s^4}{2.3.4.\,k^2} + \frac{s^5}{2.3.4.5.\,k^3} + \text{etc.})$ Arcus ergo in quo integer fit defcenfus habebitur fi ipfius s valor ex hac aequatione quaeratur: $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}$. Fiet autem hinc in ferie $s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} +$ etc. pofito breuitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo feriei aequatur arcus CM, fi quidem corpus ex puncto M defcendere inceperit. Celeritatem maximam corpus habebit in O fumto CO $= s$ ex hac aequatione $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$ feu CO $= kl\frac{gk^2}{gk^2 - ab}$, atque altitudo huic maximae celeritati debita eft $= \frac{gk\,\text{CO}}{a} = \frac{gk^2}{a}\; l\frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} +$ etc. Ad tempus determinandum conuenit ad punctum O celeritatemque maximam refpicere, et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem celeritati in O debitam $= c$,

 et

et arcum $MO = q$, erit $CO = \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 (1 - e^{\frac{-ac}{gk^2}})$, $s = \frac{ac}{gk} + q$. His substitutis erit altitudo debita celeritati in M seu $v = \frac{-gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$. Quia nunc v minor est quam c, pono $c - v = z$, eritque $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$ atque in serie $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} +$ etc. Ex qua conuertendo fit $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Incipiat descensus in puncto M, erit ibi $v = o$ et $z = c$, ideoque $OM = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Ex eadem formula, si ponatur q negatiuum, habebitur motus per OCN: at quia perinde est, siue q ponatur negatiuum siue k, erit arcus ON, si N fuerit punctum quousque corpus ascendit, $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} +$ etc. Tempus vero per MO hoc modo inuenitur; quia est $ds = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \frac{a^2zdz\sqrt{2az}}{432g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. hoc diuisum per $\sqrt{v} = \sqrt{(c-z)}$ dat elementum temporis $= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g(cz-z^2)}} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}} + \frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g(cz-zz)}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3\sqrt{(c-z)}} + \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^2k^4\sqrt{g(cz-z^2)}} -$ etc. Quod ita integrari debet vt posito $v = c$ vel $z = o$ euanescat; deinde si ponatur $z = c$ habebitur tempus quo corpus per arcum MO descendit. Hoc igitur tempus posita peripheriae ad diametrum

ratione

ratione π ad 1 erit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ + etc. Posito igitur k negatiuo erit tempus quo corpus ex O ad N vsque ascendit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ + etc. Tempus ergo per MCN seu tempus vnius dimidiae oscillationis est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}$ + etc. Q. E. I.

Corollarium 1.

550. Si ergo celeritas maxima corporis descendentis fuerit debita altitudini c, propter CO $= \frac{ac}{gk}$ erit MC $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}}$ – etc. Totus vero ascensus CN erit $=$ ON – CO $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}}$ + etc. Hinc erit CM – CN $= \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3}$ – etc. atque MCN $= \frac{2\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{540g^2k^4\sqrt{g}}$ + etc.

Corollarium 2.

551. Si totus arcus descensus MC ponatur $=$ E et sequens arcus ascensus CN $=$ F, atque altitudo debita celeritati in C $= b$, erit $\frac{ab}{g} = k^2 - e^{\frac{-E}{k}}(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4}$ – – – etc. Atque posito k negatiuo eodem modo inuenitur $\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4}$ + etc. Ex quibus fit $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4}$ – etc.

atque altitudo debita celeritati maximae $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$

Corollarium 3.

552. Quia F eſt arcus aſcenſus in prima dimidia oſcillatione, erit idem arcus F arcus deſcenſus in ſequente oſcillatione: cum quo ergo coniungetur arcus aſcenſus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^5}{405k^4} - \text{etc.}$ Atque ſimili modo ſequentes oſcillationes quotquot libuerit definiri poſſunt.

Corollarium 4.

553. Ex aequatione tempus exponente apparet tempus quo corpus ex M ad O peruenit ſemper minus eſſe tempore quo corpus ex O ad N vsque pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior eſt quam arcus OM, arcus vero CN minor eſt arcu MC.

Corollarium 5.

554. Si oſcillationes fuerint infinite paruae, ſeu c quantitas euaneſcens, congruent oſcillationes cum oſcillationibus in vacuo factis; in ſingulis enim expreſſionibus iidem termini euaneſcent, qui euaneſcerent poſito $k = \infty$. Minimis ergo oſcillationibus iſochronae erunt oſcillationes penduli longitudinis a in vacuo, ſollicitati a potentia g, ſeu penduli in hypotheſi grauitatis $= 1$, cuius longitudo eſt $= \frac{a}{g}$.

Co-

Corollarium 6.

555. At ſi oſcillationes fiant maiores, tempora oſcillationum quoque fient maiora, quare in hac reſiſtentiae hypotheſi cyclois tautochroniſmi proprietate non gaudet. Quo enim in quaque oſcillatione maior fuerit celeritas maxima, maior quoque erit exceſſus temporis oſcillationis huiusmodi ſupra tempus oſcillationis minimae.

Scholion 1.

556. Quod diximus oſcillationes minimas cum oſcillationibus in vacuo congruere locum habet, ſi a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si enim a eſſet infinite magnum, ſeu k infinite paruum, ſequentes termini tempus exprimentes $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi a c\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} +$ etc. non euaneſcerent etiamſi c, eſſet infinite paruum. Tum igitur tantum oſcillationes minimae ſuper curua quacunque in vacuo et medio reſiſtente inter ſe congruent, quando neque radius oſculi curuae in infimo puncto fuerit infinite magnus, neque reſiſtentia infinite magna.

Exemplum.

557. Exempli loco cuoluamus caſum, quo reſiſtentia tam ſit exigua, ideoque k quantitas tam magna vt fractiones, in quarum denominatoribus k plures duabus habet dimenſiones, tuti pro nihilo haberi poſſint. Dicta igitur altitudine celeritati maximae in O debita c, ita vt ſit $CO = \frac{ac}{gk}$; erit

erit arcus descensus $MC = E = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$ et sequens arcus ascensus $CN = F = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Vnde inuenitur $\sqrt{c} = \frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}} - \frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}} + \frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$, seu $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{3ak^2}$ atque $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$. Tempus ergo dimidiae oscillationis per MCN est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus $= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$, quem sequetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$; atque tempus huius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$, vbi vltimus terminus negligi potest ob k^3 in denominatore. In tertia semioscillatione est arcus descensus $= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$, et arcus descensus $= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$ Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n est arcus descensus $= E - \frac{2(n-1)E^2}{3k} + \frac{4(n-1)^2E^3}{9k^2}$ et arcus ascensus $= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$ Quamobrem post n semioscillationes corpus ab infimo puncto C distabit arcu $E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis quantitate $\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Tempus autem semioscillationis numero n indicatae erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$ At si totus arcus primae semioscillationis MCN dicatur A, erit $A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$ et $E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$ euanescente sponte termino sequente. Hinc to-

ſequente. Hinc totus arcus oſcillatione per numerum n indicata deſcriptus erit $= 2E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2 A^3}{9k^2}$.

Corollarium 7.

558 Si n fiant oſcillationes dimidiae et arcus deſcenſus primae oſcillationis fuerit E et arcus aſcenſus vltimae $= L$, erit $L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, quae expreſſio, ſi per ſeriem propius capiatur, fere congruet cum progreſſione geometrica eiusdem initii, hancque ob rem erit $L = \frac{3Ek}{3k+2nE}$ ſeu $3k(E-L) = 2nEL$.

Corollarium 8.

559. Hinc ſi peractis aliquot ſemioſcillationibus detur arcus deſcenſus primae oſcillationis E, vna cum arcu aſcenſus vltimae L inueniri poteſt numerus ſemioſcillationum n eſt, namque $n = \frac{3k(E-L)}{2EL}$.

Corollarium 9.

560. Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere, ſed ex n et E datis idem reperitur arcus L quaecunque fuerit longitudo penduli a. Atque eſt ſemper n proportionalis ipſi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

Scholion 2.

561. Huiusmodi experimenta circa oſcillationes in medio reſiſtente multa recenſet Newt. in

Phil. Lib. II. vbi notat arcum descensus primae, arcum descensus vltimae oscillationis atque numerum oscillationum tam in aëre quam in aqua et mercurio. Quare si haec media perfecte resisterent in duplicata celeritatum ratione, congrua esse deberent cum hisce formulis, ita vt decrementum arcus proportionale esset numero oscillationum et arcui primo et vltimo coniunctim. Quod etiam locum habere obseruaui in maioribus oscillationibus, in quibus celeritas non est nimis exigua. At in oscillationibus minimis maxima aberratio ab hac regula conspicitur. Ex quo colligitur quo maior fuerit corporis celeritas in fluido, eo propius resistentiam accedere ad rationem duplicatam celeritatum, motum autem tardissimum alii resistentiae insuper esse obnoxium, quae in motibus celerioribus prae resistentia, quae quadratis celeritatum est proportionalis, euanescat. In hisce quoque experimentis Newtonus resistentiam partim simplici celeritatum rationi, partim sesquiplicatae, partim duplicatae proportionalem assumsit, neque tamen pro motibus tardissimis satisfecit. In vltima vero Phil. Editione ipse Newtonus quoque insufficientem priorem theoriam suam agnoscit, atque pluribus rationibus ostendit alteram illam fluidorum resistentiam esse constantem seu temporis momentis proportionalem; quam antea ipsis celeritatibus proportionalem erat arbitratus. Hanc ob rem istam resistentiam cum ea, quae quadratis celeritatum est propor-

proportionalis in ſequenti propoſitione coniunctam conſiderabimus; cum praeſertim aequationum reſolutio et celeritatum determinatio hac adiectione non difficilior euadat.

Corollarium 10.

562. Quod ad tempora oſcillationum et ſemioſcillationum attinet, perſpicuum eſt ea decreſcere, quo minores fiant arcus deſcripti; atque ſi arcus plane euaneſcant tempus dimidiae oſcillationis fore $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 11.

563. Exceſſus autem cuiusque ſemioſcillationis temporis ſupra tempus minimae ſemioſcillationis in caſu reſiſtentiae minimae eſt $\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$, denotante E arcum deſcenſus illius ſemioſcillationis Quare iſte exceſſus proportionalis eſt quadrato arcus deſcenſus, vel etiam quadrato totius arcus ſemioſcillatione deſcripti.

Scholion 3.

564. Cyclois igitur, quae ab Hugenio apta eſt demonſtrata ad iſochroniſmum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione amittit, et hanc ob rem in aëre non inſeruit, niſi vel oſcillationes ſint valde paruae, vel inter ſe proxime aequales. Ex hoc vero, quod maiores oſcilla-

fcillationes diutius durent, colligi licet, veram curuam tautochronam in hac refiftentiae hypothefi magis effe curuam quam cycloidem. Quemadmodum fcilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois eft in infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrona in cycloide continebitur, atque eius curuedo a puncto infimo magis decrefcet, quam curuedo cycloidis.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

565. *Si medii refiftentia partim fuerit conftans, partim quadratis celeritatum proportionalis, determinare motum ofcillatorium corporis fuper cycloide* MCB, *faltem in cafu quo refiftentia eft valde parua.*

Solutio.

Sit vt ante diameter circuli generatoris CP $= \frac{1}{2}a$; CP$=x$; et arcus CM$=s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b, et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorfum follicitans fit $=g$, pars refiftentiae quae eft conftans fit $=b$, et pars refiftentiae quadratis celeritatum proportionalis fit $= \frac{v}{k}$ vt ante; erit k quantitas valde magna refpectu v et s et a; atque b valde paruum refpectu g. Iam fiat defcenfus fuper arcu MC, erit $dv = -g\,dx + b\,ds + \frac{v\,ds}{k}$, atque hinc $v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} (g\,dx - h\,ds)$.

At

At quia eſt ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$ erit $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{\frac{-s}{k}} - gke^{\frac{-s}{k}} s}{a}$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} b\,ds = bk - bke^{\frac{-s}{k}}$; vnde fit $v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + bak - gk^2) - bak + gk^2 + gks}{a}$ Celeritas maxima habetur ſi fuerit $\frac{gs}{a} = b + \frac{v}{k}$ ſeu $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - bak}$. Dicatur altitudo debita celeritati maximae in $O = c$, erit $CO = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 - bak - gk^2 e^{\frac{-bak - ac}{gk^2}}$. Ponatur arcus $MO = q$ erit $s = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk} + q$; vnde fit $v = \frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$. Quia nunc v minus eſt quam c, pono $c - v = z$, erit $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$. Quae aequatio in ſeriem conuerſa dat vt ſupra $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$, atque $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Incipiat deſcenſus ex M, erit ibi $v = o$ et $z = c$, ideoque $MO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Ex eadem formula reperitur arcus aſcenſus $ON = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$; atque cum in his b non reperiatur erit vt ſupra tempus ſemioſcillationis per $MON = \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}$. Totus vero arcus deſcenſus MC erit $= \frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$, atque arcus aſcenſus $CN = -\frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$.

 Quare

Quare ſi arcus deſcenſus MC ponatur E et arcus aſcenſus $CN = F$, erit $F = E - \frac{2ba}{g} - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4baE}{3gk} + \frac{4E^2}{9k^2}$. In ſequente ſemioſcillatione eſt arcus deſcenſus F et arcus aſcenſus $G = E - \frac{4ba}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16baE}{3gk} + \frac{16E^2}{9k^2}$. Atque generaliter in ea ſemioſcillatione, quae indicatur numero n, arcus aſcenſus eſt $= E - \frac{2nba}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2baE}{3gk} + \frac{4n^2E^2}{9k^2} = \frac{3gkE - 6bnak}{3gk + 2gnE}$. Quare ſi peractis n ſemioſcillationibus dicatur arcus deſcenſus primae E et arcus aſcenſus vltimae L, erit $2gnEL = 3gk(E-L) - 6bnak$ ſeu $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6bak}$. Tempus vero quo quaelibet ſemioſcillatio per MCN abſoluitur eſt $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE-ba)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$ loco c eius valore ſubſtituto. Q. E. I.

Corollarium I.

566. Si ponatur $c = o$, vt locus prodeat in quo corpus ſit quieturum, inuenitur $MC = \frac{ba}{g}$: corpus ergo in quiete permanere poteſt non ſolum in puncto C, ſed extra C quoque in diſtantia $\frac{ba}{g}$ cis et vltra C. Quare in huiusmodi medio reſiſtente ex ſtatu quietis penduli non exacte linea verticalis poteſt cognoſci; ſed angulo cuius ſinus eſt $\frac{b}{g}$ aberrari poteſt.

Scholion I.

567. Huiusmodi reſiſtentiam in aqua locum habere experimentis facile euincitur, quippe in moti-

motibus tardissimis resistentia quadratis celeritatum minime proportionalis obseruatur; in fluido vero praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistentiam constantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a *La Hirio* institutis, quibus monstrauit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete permanere posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate penderet. Ex experimentis *Newtoni*, quae circa retardationem motus pendulorum in aëre instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistentiam constantem esse circiter partem millionesimam grauitatis, seu $\frac{h}{g} = \frac{1}{1000000}$. Hic ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo 10''', qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis esse poterit hic error, quo minor simulque leuior globus adhibeatur.

Corollarium 2.

568. Ad hunc angulum inueniendum inseruit ista aequatio ex superiori deducta $\frac{h}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3an} =$ sinui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At loco E arcum paruum accipi conuenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensibiles.

Corollarium 3.

569. Ex aequatione $n = \frac{3gh(E-L)}{2gEL+6bah}$ apparet quo maior sit arcus oscillatione descriptus eo minorem

norem fieri terminum $6bak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resistentia tantum in minimis oscillationibus sentiatur.

Corollarium 4.

570. Quia b est numerus tum per hypothesin valde paruus, tum in subtilibus fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, reipsa fere euanescens: in expressione temporis euanescet quoque ba prae gE, ideoque tempus vnius semioscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. Resistentia igitur constans non immutabit tempora oscillationum.

Scholion 2.

571. Etiamsi ergo haec resistentia constans cum resistentia quadratis celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculus eo neque fit prolixior neque difficilior. Nam ex celeritate maxima $\sqrt{c}$ totus arcus vna semioscillatione descriptus eodem modo determinatur, siue haec resistentia constans adsit siue non; vtroque enim casu plane eadem obtinetur aequatio. Quamobrem vel ex hoc ipso sequi videtur, hanc resistentiae legem in natura locum habere, alias vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, actu non inueniri. Fluida autem iam pridem duplicem resistentiam exercere obseruata sunt, alteram quadra-

is

tis celeritatum proportionalem, quae in motibus celerioribus sola obseruetur, alteram in motibus tardissimis tantum sensibilem. Illa resistentia oritur a vi inertiae particularum fluidi, et per eam corpus de motu suo amittit, quando particulas eas remouet; quam quadratis celeritatum proportionalem esse dubitari nequit. Haec vero resistentia a tenacitate fluidi ortum habet, qua particulae fluidi inter se cohaerent et difficulter a se inuicem separantur. Dum igitur corpus per datum spatium mouetur datus particularum numerus ipsi spatio proportionalis a se inuicem diuelli debet; quare haec resistentia congruit cum potentia absoluta motum corporis retardante; quippe quae etiam per aequalia spatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit. Haec igitur resistentia seu vis motui corporis semper est contraria, et secundum ipsam directionem motus in corpus agit, atque ideo est vis tangentialis perpetuo constans et retardans. At hoc casu natura a calculo exceptionem postulat, quando corpus quiescit. Quoniam enim haec vis est constans, aeque agere deberet in corpus quiescens ac in motum; quiescens autem corpus, quia fluidi particulas non diuellit, hanc vim sentire nequit. Accedit ad hoc, quod, cum haec vis directioni motus sit contraria, ea in corpus quiescens, quod nullam habeat directionem, nullum effectum habere queat. At si motus super linea curua inuestigatur, tangens curuae semper pro directione motus habetur, etiamsi cor-

corpus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore quiescente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod paruum spatium circa C in quiete permanere posse ideo est dicendum, quia eius nisus versus C non sufficit ad particulas fluidi a se inuicem separandas. Quare corpus quiescere potest in quolibet puncto illius spatioli, etiamsi calculus ostendat, etiam in ipso puncto C corpus non in quiete perseuerare posse.

Scholion 3.

572. Ex his quae partim generaliter tradidimus partim de cycloide attulimus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione celeritatum motus corporis super quacunque curua possit determinari. Considerauimus quidem medium resistens vniforme, et potentiam sollicitantem quoque aequabilem; sed ex aequatione resoluenda apparet, eam quoque integrari posse, quomodocunque tum medium sit difforme, tum potentia sollicitans variabilis, semper enim in aequatione altitudo celeritati debita v vnicam tantum habet dimensionem. Progredior igitur ad alias medii resistentis hypotheses; sed quia tum non pro quauis curua motus potest definiri, curuae primo sunt inueniendae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic autem iuxta

ta

ta institutum nostrum eas curuas, quae ad aequationem homogeneam deducunt, in qua indeterminatae vbique eundem obtinent dimensionum numerum. Si resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habetur ista aequatio $dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m}$, quae quo sit homogenea inter v et x debet esse $ds = x^{-m} dx$, seu $s = a^m x^{1-m}$, seu $x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}$. Vel si x et s datis quantitatibus augeantur vel diminuantur, in curua, cuius haec est aequatio $x = a^{\frac{m}{m-1}} (s+f)^{\frac{1}{1-m}} - a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}}$, motus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in simplici ratione celeritatum curua fit cyclois, ideoque motum super ea determinemus.

PROPOSITIO 65.

Problema.

573. *In medio quod resistit in simplici ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide* ACB, *existente tam medio quam potentia sollicitante vniformi.* Tab. XIII. Fig. 1.

Solutio.

Sit iterum vt ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$: abscissa $CP = x$, et arcus $CM = s$.

Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorsum trahens sit $= g$; et resistentia $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus, erit ex natura descensus $dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gs\,ds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a}$, erit $v = \frac{ku^2}{a^2}$ et $dv = \frac{2ku\,du}{a^2}$, vnde fit $2ku\,du = -gas\,ds + au\,ds$, quae aequatio ita debet integrari vt facto $s = o$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. Pro ascensu vero super arcu CN haec habetur aequatio $2ku\,du = -gas\,ds - au\,ds$. Ponatur $u = ps$, habebitur pro descensu $2kp^2s\,ds + 2kps^2\,dp = -gas\,ds + aps\,ds$, seu $\frac{2kp\,dp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}$. Hinc fit integrando $ls = lC - \frac{1}{2}l(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-8gak)}} l\frac{4kp - a + \sqrt{(a^2-8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2-8gak)}} = lC - \frac{1}{2}l\frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-8gak)}} l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}$, seu $lC = l(2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}} l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}$. Ponatur $s = o$ et $v = b$ fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc fiet $\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}$.

In altera vero curuae parte CN pro ascensu corporis posito $CN = s$, habetur haec aequatio $\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}$. Si altitudo celeritati maximae, quae fit in O, debita dicatur c, erit $CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$, atque $c = b\left(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2-8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}$. Hae autem aequationes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$, seu

$= \frac{a}{8g}$. Nam si $k > \frac{a}{8g}$ aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul pendebunt. Ponamus esse $k = \frac{a}{8g}$, eritque $\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{(p-\frac{a}{4k})^2} = \frac{-dp}{p-\frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k(p-\frac{a}{4k})^2}$. Integrando ergo prodibit $ls = lC - l(p-\frac{a}{4k}) + \frac{a}{4kp-a} = lC - l(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}) + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as} = lC - l(4a\sqrt{kv}-as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as}$. Fit igitur $lC = l4a\sqrt{kb}$; vnde habebitur $l\frac{4\sqrt{kv}-s}{4\sqrt{kb}} = \frac{s}{4\sqrt{kv}-s}$. Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $= 0$, semper enim $4\sqrt{kv}$ maius esse debet quam s. Hoc ergo casu, si celeritas in puncto C sit realis descensus initium fit imaginarium. Quare vbicunque corpus descensum inceperit celeritas in puncto infimo C erit $= 0$. Ad motum igitur inuestigandum si descensus fit ex puncto dato E fueritque $CE = f$, erit $lC = l\,af + 1$, ideoque $l\frac{s-4\sqrt{kv}}{f} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv}-s}$. Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt{kv} < s$, quamobrem in puncto C vbi $s = 0$ debet quoque esse $v = 0$. Maxima vero celeritas, quae fit in O habetur ponendo $\sqrt{v} = \frac{gs}{a}$ seu $s = 8\sqrt{kv}$, quo posito prodit $l\frac{s}{2f} = -1$, seu $s = \frac{2f}{e} = CO$ denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$. His igitur casibus, quibus arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At si corpus per arcum CN celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, motus

hac aequatione exprimetur $l\frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s}$, ex qua patet eſſe $s + 4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb}$ et $\sqrt{v} < \sqrt{b}\frac{s}{4\sqrt{k}}$. Totus arcus aſcenſus CN reperitur faciendo $v = o$, tumque erit $l\frac{s}{4\sqrt{kb}} = -1$, ſeu $CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}$. Si eſt $k < \frac{a}{8g}$, quem caſum iam tractauimus, reſiſtentia adhuc ſit maior, quamobrem multo magis celeritas in C erit $= o$, ſi quidem deſcenſus ex puncto dato fiat; atque pro data celeritate in C initium deſcenſus erit imaginarium Quamobrem aequatio quam pro deſcenſu dedimus eſt imaginaria, niſi conſtans determinetur ex dato deſcenſus initio. Sit igitur arcus $CE = f$, erit $lC = lgaf^2\sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ factoque $s = o$ erit $l\frac{gf^2}{av} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ ſi v non eſſet $= o$, nam ſi v eſt $= o$ haec aequatio non valet. Apparet autem hanc aequationem contradictionem continere, quia av maius eſſe deberet quam gff ſeu $v > \frac{gss}{a}$ poſito s pro f. At eſt $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita eſſet $v > 2gx$, quod eſt abſurdum, nam in vacuo eſt tantum $v = gx$, atque in medio reſiſtente adhuc minor eſſe debet. Pro aſcenſu autem inſeruit aequatio inuenta atque ex ea totus arcus aſcenſus CN reperitur faciendo $v = o$, quo poſito prodit $\frac{as^2}{2ab} = \left(\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}} = \frac{a.CQ}{b}$. Ex his igitur perſpicitur ſi fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$ oſcillationes peragi non poſſe, quia poſt nullum deſcenſum aſcenſus ſequi poteſt. Quare nobis potiſſimum reliqui caſus, quibus eſt $k > \frac{a}{8g}$, ſunt in-

uestigandi; quia enim in his resistentia est minor, atque quantumuis parua assumi potest, oscillationes vtique perfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus $\frac{-ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}}$ quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc $\frac{-ds}{s} = \frac{qdq + \frac{adq}{4k}}{qq + \frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}$. Ponatur $\frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2$, quia est quantitas affirmatiua, eritque $lC - ls = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4k}\int \frac{dq}{q^2 + B^2} = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4Bk} At. \frac{q}{B}$, vbi $At. \frac{q}{B}$ est arcus circuli cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existente sinu toto $= 1$. Restituto autem pro q valore debito erit $lC = l\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})} + \frac{a}{4Bk} At. \frac{4a\sqrt{kv} - as}{4Bks}$. Ponatur ad lC definiendum $s = o$ et $v = b$, erit $lC = l\sqrt{2ab\sqrt{k}} + \frac{a}{4Bk} At. \infty$, quare erit $l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = -\frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bks}{4a\sqrt{k}\sqrt{v} - as}$. Pro ascensu vero per arcum CN inuenitur $l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bks}{4a\sqrt{kv} + as}$. Posito nunc $v = o$ prodit integer arcus descensus MC ex hac aequatione $l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g.CP}}$. Atque totus arcus ascensus CN inuenietur ex hac aequatione $l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk} At.. \frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g.CQ}}$. Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et descensus inter se aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus quorum tangens est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet alius prodescensu. Atque

cum

cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum ad propositum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine prodeunt successiue omnes arcus tam ascensus quam descensus, quamdiu corpus oscillationes peragit; nam quia aequatio inuenta est generalis ea omnia loca ostendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas vnquam est $= 0$. Quare in hac resistentiae hypothesi hoc habetur commodum, quod statim pro qualibet oscillatione centesima v. gr. arcus tam descensus quam ascensus possit definiri. Sit arcus D cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$ erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum D; $\pi + D$; $2\pi + D$; $3\pi + D$; etc. Pro arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D, eritque $\frac{2ab}{gss} = e^{\frac{Da}{2Bk}}$ seu abscissa arcus MC $= \frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$. Abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae semioscillationis erit $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit $= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(2\pi+D)}{2Bk}}$. Atque generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione quae indicatur per $n+1$ est $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$, quae simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione quae indicatur numero n. Quod ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni referuamus. Q.E.I.

Co-

Corollarium 1.

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolui non possunt; quia finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$. At si $k > \frac{a}{8g}$ oscillationes perpetuo durabunt, quia expressio $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$ neque euanescere neque negatiua fieri potest.

Corollarium 2.

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ascensus in data ratione; est enim abscissarum ratio $\frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$ ad $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$, ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendet a celeritate data $\sqrt{b}$.

Corollarium 3.

576. Atque simili modo arcus descensus primae semioscillationis ad arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae datam habet rationem, est enim haec ratio vt $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus semioscillationum duplo fit maior haec ratio fit duplicata.

Corollarium 4.

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum se insequentium constituunt progressionem geometricam decrescentem in ratione 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$. Atque ideo integri etiam arcus semioscillationibus de-

ſcripti erunt in progreſſione geometrica eiusdem denominatoris.

Scholion I.

578. Quia autem pro D infiniti arcus accipi poſſunt, quo appareat quinam ex iis pro arcu deſcenſus accipi debeat; ſumo caſum quo $k = \frac{a}{8g}$, atque arcus aſcenſus $= \frac{4\sqrt{kb}}{e}$; ſeu eius abſciſſa $= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g} e^{-2}$. Hoc autem caſu eſt $B = o$ atque abſciſſa arcus aſcenſus $= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}$. Debet ergo eſſe $\frac{a(\pi + D)}{2Bk} = 2$ et $\pi + D = \frac{4Bk}{a} = o$. Eſt vero $\frac{4Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ ſit $= o$, debet $\pi + D$ eſſe $= o$. Ex quo intelligitur $\pi + D$ eſſe minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ reſpondentem. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ reſpondens E, erit $D = E - \pi$. Quocirca in prima ſemioſcillatione erit abſciſſa arcus deſcenſus $= \frac{b}{g} e^{\frac{a(\pi - E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$, ideoque ipſe arcus $MC = e^{\frac{a(\pi - E)}{4Bk}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Ponatur $\frac{4Bk}{a}$ ſeu tangens arcus $E = \tau$, erit arcus deſcenſus primae ſemioſcillationis $= e^{\frac{\pi - E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Arcus aſcenſus primae ſeu arcus deſcenſus ſecundae ſemioſcillationis $= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Atque arcus deſcenſus in ſemioſcillatione quae indicatur numero $n + 1$ erit $= e^{\frac{-E-(n+1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui eſt ſimul arcus aſcenſus in ſemioſcillatione numero n indicata. Progreſſionis geometricae ergo, quam hi arcus aſcenſus conſtituunt, denominator eſt $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Co-

Corollarium 5.

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in puncto infimo C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero n indicatur, celeritas in C debita altitudini β, erit arcus ascensus $= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui aequalis esse debet ipsi $e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Hinc fit $\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}$. Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successiuis progressionem geometricam quoque constituunt cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Corollarium 6.

580. Si n ponatur numerus negatiuus semioscillationes, quae ante primam factae esse possent, cognoscuntur. Vt in semioscillatione primam praecedente arcus descensus esse debuisset $= e^{\frac{2\pi-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Corollarium 7.

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex puncto cycloidis supremo A, erit arcus descensus $= a$. Quare est $\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi-E}{\tau}}$ et celeritas in puncto infimo C seu $\sqrt{b}$ erit $e^{\frac{E-\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}$.

Corollarium 8.

582. Si resistentia fere evanescat, seu k fuerit quantitas vehementer magna erit $B = \sqrt{\frac{ga}{2k}}$ et

 $\tau =$

$\tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}$. Cum igitur ſit τ valde magnum erit $E = \frac{\pi}{2}$, atque arcus deſcenſus primae ſemioſcillationis $= e^{\frac{\pi}{2\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}} = (1 + \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$ et arcus aſcenſus $= (1 - \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Scholion 2.

583. Ex ſolutione huius propoſitionis inter cetera intelligi poteſt, quanta circumſpectione ſaepe opus ſit ad concluſiones ex aequationibus deducendas. Nam in caſu $k > \frac{a}{8g}$, aequationes quas pro deſcenſu et aſcenſu inuenimus ita ſunt comparatae, vt ex iis ſequi videatur arcum aſcenſus aequalem eſſe arcui deſcenſus; nam facto $v = o$ ex vtraque aequatione prodit $\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. Atque hoc ita ſe quoque haberet, niſi deſcenſus neceſſario faceret $b = o$. Poſito autem $b = o$, nullus datur aſcenſus et aequatio pro deſcenſu prorſus eſt immutanda. Quare niſi ex caſu quo $k = \frac{a}{8g}$ aduertiſſemus b eſſe $= o$, difficulter ex aequatione veritas cognoſci potuiſſet. Idem quoque accidit, vbi in eadem hypotheſi $k < \frac{a}{8g}$ deſcenſu ex dato puncto facto celeritatem in puncto C inueſtigauimus, poſito enim $s = o$, aequatio ad abſurdum deduxit. Ita enim eſt comparata illa aequatio, vt facto $s = o$ non oſtendat eſſe quoque $v = o$, etiamſi reuera ſit $v = o$; ii enim tantum termini ſunt neglecti, in quibus reperiebatur s, cum reliqui v continentes eodem iure negligi

negligi debuissent. Inueniri ergo non potest esse $v=o$ si $s=o$, sed quia ex aequatione absurdum sequitur, nisi esset $v=o$, ex hoc concludi potest esse $v=o$ si $s=o$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspicitur, difficulter lapsus euitari poterit.

PROPOSITIO 66.

Theorema.

584. *In medio vniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, omnes descensus super cycloide* AMC *fiunt aequalibus temporibus: atque similiter etiam omnes ascensus super cycloide* CNB *aequalibus temporibus absoluuntur; si quidem potentia sollicitans fuerit vniformis et deorsum directa.*

Tab. XIII. Fig. 1.

Demonstratio.

Pro descensu si dicatur arcus $CM=s$ et altitudo debita celeritati in M, v, habetur ista aequatio $dv=-\frac{gsds}{a}+\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\sqrt{v}=u$, erit u vt ipsa celeritas in M, atque ob $dv=2udu$ habetur ista aequatio $2udu=-\frac{gsds}{a}+\frac{uds}{\sqrt{k}}$, in qua u et s vbique eundem tenent dimensionum numerum. Quare si ponatur initium descensus in E et arcus $CE=f$, et integretur aequatio proposita ita vt fiat $u=o$ posito $s=f$, prodibit aequatio integralis in qua u, f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Ex hac igitur aequa-

bitur u functioni vnius dimensionis ipsarum f et s. Quocirca elementum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsarum f, s atque elementi ds. Eius ergo integrale ita acceptum vt euanescat posito $s=o$, erit functio quoque nullius dimensionis ipsarum f et s, et exhibebit tempus per arcum CM. In hac igitur functione si ponatur $s=f$, euanescet f vbique ex ea functione, aequabiturque tempus totius descensus per EC functioni ex quantitatibus constantibus g, a et k tantum compositae, in quam neque f neque alia quantitas punctum E respiciens ingredietur. Quamobrem tempus descensus per EC eadem exprimetur quantitate, vbicunque punctum E accipiatur, atque ideo omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus. Si in formula tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco $\sqrt{k}$ prodibit tempus ascensus in arcu CNB, quod propterea quoque erit constans, quantuscunque fuerit arcus ascensu percursus. Q. E. D.

Corollarium 1.

585. Quia u aequalis est functio vnius dimensionis ipsarum f et s aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s. Quare si ponatur $s=nf$ aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inerit f. In variis ergo descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum, erunt ipsis arcubus f proportionales.

Co-

Corollarium 2.

586. Cum in descensu maxima celeritas sit vbi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, inuenietur punctum O seu arcus CO ex aequatione in qua f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f proportionalis. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae, quam arcus CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

Corollarium 3.

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s; tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum f et s, seu etiam ipsius f et arcus EM.

Corollarium 4.

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum, sed etiam tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inter se aequalia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

Corollarium 5.

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam omnes ascensus; etiam omnes semioscillationes aequalibus absoluentur temporibus. Atque in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscil-

oſcillationes continuat, omnes abſoluentur temporibus aequalibus.

Corollarium 6.

590. Cyclois ergo, quae eſt curua tautochrona in vacuo, eandem proprietatem retinet in medio quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum. Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in medio, cuius reſiſtentia eſt conſtans, ſeu momentis temporum, vt *Newtonus* loquitur, proportionalis. (570.)

Scholion 1.

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum *Newtonus* quoque demonſtrauit in Princ. Phil. atque quod ad reſiſtentiam ipſis celeritatibus proportionalem attinet, ex hoc demonſtrationem formauit, quod in diuerſis deſcenſibus, ſi arcuum partes totis arcubus proportionales accipiantur, in iis locis celeritates ſint totis arcubus quoque proportionales. Nam ſi celeritates totis arcubus fuerint proportionales, ſi elementa quoque capiantur totis arcubus proportionalia, tempora per ea erunt inter ſe aequalia.

Scholion 2.

592. Etſi autem ex his appareat, tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum inter ſe eſſe aequalia, tamen determinari non poteſt, quantum ſit tempus ſiue deſcenſuum ſiue aſcenſuum neque etiam

etiam tempora deſcenſuum et aſcenſuum inter ſe poſſunt comparari. Aequatio enim relationem inter s et u definiens ita eſt complicata, vt ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$, per vnicam variabilem non poſſit exprimi. Praeterea oſcillationes infinite paruae, quae ante in determinandis temporibus calculum valde facilem reddiderunt, in hac reſiſtentiae hypotheſi nihil adiuuant. Nam etiam ſi arcus totus deſcriptus ponatur infinite paruus, in aequatione $l\frac{\sqrt{2}ac^2\sqrt{k}}{\sqrt{(2auu^2\sqrt{k}-2aus+gss\sqrt{k})}}=\frac{a}{4Bk}\,A.t.\frac{4Bks}{as-4au\sqrt{k}}$ quae ex ſuperiori integrata oritur, ne vnicus terminus euaneſcit prae ceteris. Pendebit autem tempus aſcenſus a quantitatibus a, k et g, at quomodo ex his ſit compoſitum non liquet. Interim tamen hoc certum eſt, quo maior ſit g ceteris paribus, minus eſſe tempus, at creſcente a, tempus quoque creſcere; k vero creſcente diminui, quia reſiſtentia ſit minor. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi reſiſtentia in motibus tardiſſimis non euaneſcit, quemadmodum in reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo conſequi videtur, ſi reſiſtentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione creſcat, in motibus tardiſſimis reſiſtentiam negligi poſſe; at ſi reſiſtentia fuerit in minore ratione, etiam in motibus tardiſſimis reſiſtentiam conſiderari debere.

PROPOSITIO 67.
Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

593. *In medio vniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, cuius exponens est* $2m$, *determinare motum corporis super curua* CMA, *in qua arcus quisque* CM *proportionalis est potestati abscissae* CP, *cuius exponens est* $1-m$.

Solutio.

Positis abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit $ds = \frac{a^m dx}{x^m}$. Sit celeritas in M debita altitudini v, erit resistentia in $M = \frac{v^m}{k^m}$; atque ideo si corpus descendere ponatur super arcu CM habebitur ista aequatio $dv = -g dx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Pro ascensu autem super eadem curua inseruit ista aequatio: $dv = -g dx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Vtraque vero aequatio separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit enim pro descensu $xdt = -t dx - g dx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}$ seu $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t)-a^m t^m} = \frac{dx}{x}$, atq; pro ascensu haec aequatio $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t)+a^m t^m} = \frac{dx}{x}$. In quibus aequationibus variabiles t et x a se inuicem sunt separatae; ita

vt

vt t per x ope quadraturarum possit determinari. Constans in integratione addenda definiri debet vel ex data celeritate in puncto C vel ex loco curuae in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur. Si ponatur abscissa toti arcui descensus vel ascensus respondens f; aequalis erit v functioni vnius dimensionis ipsarum f et x tam in descensu quam ascensu propter aequationes differentiales homogeneas. Hanc ob rem $\sqrt{v}$ aequabitur functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x. Tempus igitur descensus per MC, quod est $=$ $\frac{ds}{\sqrt{v}} = a^m \int \frac{dx}{x^m \sqrt{v}}$ aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimensionum ipsarum f et x. Quia autem posito $x = f$ prodit tempus totius descensus vt $f^{\frac{1}{2} - m}$; cui etiam proportionale est tempus totius ascensus, si quidem f abscissam arcus totius ascensus designat. Si ponatur totus arcus vel descensus vel ascensus $= A$, quia est A vt f^{1-m}, erit tempus totum vel ascensus vel descensus vt $\frac{A}{f^{\frac{1}{2}}}$ vel vt $A^{\frac{1-2m}{2-2m}}$ Plurium ergo descensuum tempora sunt in ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata totorum arcuum descriptorum. Atque in eadem ratione sunt quoque tempora ascensuum inter se; sed tempora ascensuum et descensuum inter se non comparantur. Q.E.I.

Corollarium 1.

594. Quia celeritas seu $\sqrt{v}$ aequalis est functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x; in

pluribus descensibus celeritates in puncto C acquisitae sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus corpus descendit. Atque altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, sunt in duplicata ratione celeritatum initialium in C.

Corollarium 2.

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint vt $f^{\frac{1}{2}-m}$; omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus, si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothesi pariter tempora ascensuum inter se erunt aequalia. Curua autem erit cyclois, vt ante ostendimus

Corollarium 3.

596. Quia est $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$ erit $s=\frac{a^m x^{1-m}}{1-m}$ Ex quo perspicitur, nisi sit $m<1$, curuam AMC fore negatiuam seu quod perinde est imaginariam. Semper enim curua maior esse debet quam abscissa.

Corollarium 4.

597. Praeterea semper debet esse $ds>dx$; quare quo hoc accidat si $x=0$ debet m esse numerus positiuus. Hinc nostra propositio requirit vt m inter limites 0 et 1 contineatur.

Co-

Corollarium 5.

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a; ibique erit $ds = dx$, seu tangens verticalis. Hocque loco curua habebit cuspidem, altius enim ascendere nequit, quia si $x > a$, foret $ds < dx$, quod fieri nequit.

Corollarium 6.

599. Si m continetur intra limites o et 1, curua in C habebit tangentem horizontalem, atque radius osculi in C erit $= \frac{sds}{dx} = \frac{a^{2m} x^{1-2m}}{1-m}$. posito $x = o$. Quare radius osculi in C erit infinite paruus si $m < \frac{1}{2}$ finitus si $m = \frac{1}{2}$ et infinite magnus si $m > \frac{1}{2}$.

Corollarium 7.

600. Tempora minimorum descensuum et ascensuum sunt infinite parua, si $m < \frac{1}{2}$, at finita si $m = \frac{1}{2}$. Infinite magna denique erunt, si $m > \frac{1}{2}$ Tenent ergo radiorum osculi in infimo puncto C rationem.

Scholion.

601. Habemus hic ergo exempla curuarum pro resistentia minorem quam duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus motus corporis potest determinari. At si medium in ma-

iore quam duplicata ratione resistit, curua nusquam habebit tangentem horizontalem, atque ideo descensus et ascensus nunquam finiri possunt Quo autem in exemplo appareat, qualis sit motus corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratione celeritatum resistit, inuestigare lubet motum corporis super cycloide saltem in medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero resistentiae hypothesin prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seriem potest definiri.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

602. *In medio uniformi, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, determinare tam descensum quam ascensum corporis quemcunque super cycloide* ACB.

Solutio.

Posita potentia uniformi corpus perpetuo deorsum trahente g, et abscissa $CP = x$, et arcu $CM = s$, erit ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$. Sit celeritas in C debita altitudini b, et in M altitudini v; atque exponens resistentiae k, erit resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur haec aequatio $dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2} = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^2 ds}{k^2}$; at pro ascensu ista: $dv = -\frac{gsds}{a} - \frac{v^2 ds}{k^2}$. Pro descensu po-

ponatur $v = \frac{-k^2 dz}{z ds}$; erit $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ posito ds constante. Quamobrem habebitur $k^2 ddz = \frac{gz s ds^2}{a}$; quae aequatio in seriem conuersa dat $z = f + bs + \frac{fgs^3}{2.3\,ak^2} + \frac{bgs^4}{3.4.ak^2} + \frac{fg^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \frac{bg^2s^7}{3.4.6.7a^2k^4} + \frac{fg^3s^9}{2.3.5.6.8.9a^3k^6} +$ etc. Ad constantes f et b determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s = o$; erit ergo $b = -\frac{k^2 b}{f}$. Et quia si $s = o$ est $dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2}$, propter $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$, erit $\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 b^2}{ff}$ quae aequatio cum illa congruit erit ergo $b = -\frac{bf}{k^2}$. Hoc substituto erit $v =$

$$\frac{b - \frac{gs^2}{2a} + \frac{bgs^3}{3ak^2} - \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4} \text{ etc.}}{1 - \frac{bs}{k^2} + \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4.ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} \text{ etc.}}$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur $v =$

$$\frac{b - \frac{gs^2}{2a} - \frac{bgs^3}{3k^2} + \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4} - \text{etc.}}{1 + \frac{bs}{k^2} - \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \text{etc.}}$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus inuenitur, si ponatur $v = o$, atque valor ipsius s inuestigatur. Vt si k fuerit quantitas valde magna erit arcus descensus qui sit $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} +$ etc. At sequens arcus ascensus qui sit F erit $= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} -$ etc. Q. E. I.

Corollarium I.

603. Si ergo resistentia est quam minima erit summa arcuum descensus et ascensus seu arcus

cus vna ſemioſcillatione deſcriptus, i. e. $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, quam proxime.

Corollarium 2.

604. Differentia autem inter arcum aſcenſus et deſcenſus ſcilicet $E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Quare differentia inter arcuum deſcenſus et aſcenſus eſt vt biquadratum ſummae arcuum.

Scholion 1.

605. Ex his perſpicitur in medio rariſſimo, quod reſiſtit in quadruplicata ratione celeritatum differentiam inter arcus aſcenſus et deſcenſus proportionalem eſſe biquadrato ſummae arcuum, ſeu $E-F=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Supra autem vidimus in medio rariſſimo, quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit, eſſe arcum deſcenſus $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2ab}{3gk}$, et arcum aſcenſus $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{2ab}{3gk}$; hinc erit $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ et $E-F=\frac{4ab}{3gk}=\frac{(E+F)^2}{6k}$ (557.). Quare in hac reſiſtentia eſt differentia inter arcus aſcenſus et deſcenſus vt quadratum ſummae arcuum. Atque in medio quod in ſimplici ratione celeritatum reſiſtit, ſi fuerit rariſſimum eſt $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ et $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ (582). Quare erit $E-F=\frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}}=\frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}$. Seu differentia inter arcus deſcenſus et aſcenſus eſt ipſi ſummae arcuum proportionalis.

Ex

Ex quo consequi videtur in medio quocunque rarissimo, quod resistit in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae arcuum ascensus et descensus, cuius exponens sit $2m$. Atque in hac resistentiae hypothesi coniectare licet, fore arcum descensus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2.4.6 \cdots 2m.ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1)gk^m}$ et arcum ascensus $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2.4.6 \cdots 2m.ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1)gk^m}$. Vnde fit $E - F = \frac{1.2.3 \cdots m.g^{m-1}(E+F)^{2m}}{3.5.7 \cdots (2m+1)2^{2m-1}a^{m-1}k^m}$. Quoties ergo m est numerus integer seu $2m$ numerus par, assignari potést aequatio inter $E-F$ et $E+F$: at si m fuerit numerus fractus valor fractionis $\frac{1.2.3 \cdots m}{3.5.7 \cdots (2m+1)}$ per methodum interpolationem, quam exhibui in Comment. Acad. Petrop. A. 1730, inuestigari potest. Ex qua quidem constat si $2m$ fuerit numerus impar valorem huius fractionis inuoluere quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu, quo $2m = 1$ reperimus.

Scholion 2.

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attinet, esse differentiam inter arcus descensus et ascensus super cycloide in totuplicata ratione summae arcuum, in quotuplicata ratione ce-

leritatum ſit reſiſtentia, ſi quidem fuerit minima *Newtonus* in Princ. demonſtrauit. Atque demonſtrationem etiam ex ipſa aequatione $dv = -\frac{gsds}{a} \pm \frac{v^m ds}{k^m}$ deriuare licet. Ponatur enim $v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q$, vbi Q erit quantitas valde parua prae b et $\frac{gs^2}{2a}$. Hanc ob rem habebitur $-\frac{gsds}{a} + dQ = \frac{-gsds}{a} + \frac{(b - \frac{gs^2}{2a})^m ds}{k^m}$ pro deſcenſu ſeu $Q = \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $s = o$. Pro deſcenſu ergo erit $v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ et pro aſcenſu $v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$. Ponatur $v = o$, et quia tunc proxime eſt $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q$, erit $o = \frac{-gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}$, atque $q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}$ ſi quidem poſt integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipſius q valore ipſarum $\sqrt{b}$ et s ſunt $2m$ dimenſiones habebit q huiusmodi formam Nb^m. Quocirca erit arcus deſcenſus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$ et arcus aſcenſus $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m$. Hinc ergo habebitur $E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m (E+F)^{2m}}{2^{3m-1} a^m}$. At numerus N obtinebitur ex formula $\sqrt{\frac{a}{2gb}} \int (\frac{2ab - gss}{2abk})^m ds$

S

ſi poſt integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2cb}}{\sqrt{g}}$. Atque haec eſt demonſtratio illius ipſius, quod in praecedente ſcholio ex inductione deriuabamus. Erit enim N numerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus; at ſi $2m$ fuerit numerus integer impar inuentio numeri N a quadratura circuli pendebit. Generaliter autem valor ipſius q cum hac expreſſione $\frac{2.4.6 \cdots 2m\, ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1)gk^m}$ congruit.

PROPOSITIO 69.
Problema.

607. *In medio, quo reſiſtit in quadruplicata ratione celeritatum, ſi detur corporis ſuper curua* AMC *ex dato puncto* A. *deſcendentis in ſingulis locis celeritas, inuenire celeritatem eiusdem corporis deſcenſum in quocunque alio puncto* E *incipientis.*

Tab. XIII. Fig. 2.

Solutio.

Poſito $CP = x$ et $CM = s$, ſit corporis ex A delapſi celeritas in M debita altitudini u, quae quantitas u ergo per hyp. datur per x et s. Iam ſi corpus deſcenſum ex quocunque puncto E incipiat, ſit celeritas in M debita altitudini v. Aequatio vero motum determinans erit $dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2}$, quae dat valorem ipſius v vbicunque deſcenſus inceperit; erit ergo etiam $du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$

$\frac{u^2 ds}{k^2}$. Ponatur $v = u - q$, erit $du - dq = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2} - \frac{2 qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$; ex qua aequatione propter $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ oritur $-dq = -\frac{2qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$ seu $-\frac{dq}{q^2} + \frac{2u ds}{k^2} = \frac{ds}{k^2}$, quae multiplicata per $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}$ dat hanc integralem $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} = c q + q \int \frac{e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}{k^2}$, ex qua prodit $q = \frac{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$. Quocirca erit $v = u - \frac{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$, in qua aequatione integralia $\int \frac{u ds}{k^2}$ et $\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds$ ita sint accepta vt euanescant posito $s = o$. Sit nunc altitudo celeritati in C debita $= a$, si descensus ex A fiat; at altitudo celeritati in C debita si descensus ex E fit $= b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur $v = u - \frac{(a-b) k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b) \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$. Data ergo celeritate in C nempe $\sqrt{b}$ inuenietur punctum E, in quo descensus incepit ex hac aequatione $u = \frac{(a-b) k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b) \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$, ex qua valor ipsius s dabit arcum C M E. Quia igitur datur u per s ex hac aequatione celeritas corporis ex quocun-

que

que alio puncto delapsi super curua AMC inuenietur. Q. E. I.

Corollarium 1.

608. Si valor ipsius v ita immutetur vt tam in numeratore quam in denominatore b sine coefficiente appareat, prodibit $v = \frac{(u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds - k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}})}{\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}$

$$\frac{\left(b-a+\frac{k^2u}{k^2e^{\frac{2\int uds}{k^2}}-u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}\right)}{\left(b-a-\frac{k^2}{\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}\right)}.$$ Atque erit $v=o$ si est $a+\frac{k^2u}{u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds-k^2e^{\frac{2\int uds}{k^2}}}=b.$

Corollarium 2.

609. Quia est $du-\frac{u^2ds}{k^2}=-gdx$, erit huius aequationis per $e^{\frac{2\int uds}{k^2}}$ multiplicatae integralis haec $u= ae^{\frac{\int uds}{k^2}}-ge^{\frac{\int uds}{k^2}}\int e^{\frac{-\int uds}{k^2}}dx$; integralibus ita sumtis vt euanescant posito s vel $x=o$. Vel etiam est $\frac{du}{u}+\frac{gdx}{u}=\frac{uds}{k^2}$, atque hinc $\int\frac{uds}{k^2}=l\frac{u}{a}+\int\frac{gdx}{u}$. Quare erit $e^{\frac{\int uds}{k^2}}=\frac{e^{\frac{\int gdx}{u}}u}{a}$; vnde dx loco ds in aequatione superiore potest introduci.

 Co-

Corollarium 3.

610. Si resistentia fuerit quam minima, euanescet $\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds$ prae k^2; et ideo erit $v = u - (a-b)\,e^{-\frac{2\int u\,ds}{k^2}} = u-(a-b)(1+2\int\frac{u\,ds}{k^2})$, propter k quantitatem maximam. Quamobrem erit $v = b + \frac{2b\int u\,ds}{k^2} - a - 2\int\frac{u\,ds}{k^2} + u = (1+\frac{2\int u\,ds}{k^2})(b-a+\frac{u}{1+\frac{2\int u\,ds}{k^2}})$.

Corollarium 4.

611. Cum autem sit $\sqrt{(1+\frac{2\int u\,ds}{k^2})} = 1+\frac{\int u\,ds}{k^2}$ erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2+\int u\,ds)\sqrt{(b-a+\frac{k^2 u}{k^2+2\int u\,ds})}}$. Per aequationem autem $du = -g\,dx + \frac{u^2\,ds}{k^2}$ est quam proxime $u = a - gx + \int\frac{(a-gx)^2\,ds}{k^2}$, vnde erit $\int u\,ds = \int(a-gx)\,ds$, atque $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2+\int(a-gx)\,ds)\sqrt{(b-a+\frac{k^2a-gk^2x+\int(a-gx)^2\,ds}{k^2+2\int(a-gx)\,ds})}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2+\int(a-gx)\,ds\sqrt{(b-\frac{gk^2x-\int(a^2-g^2x^2)\,ds}{k^2+2\int(a-gx)\,ds})}}$.

Scholion.

612. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesibus excepta ea, quae est constans, hanc habet praerogatiuam, vt corporis super quacunque

curua

curua moti celeritas in omnibus locis ex aequatione curuae possit definiri; ita haec resistentiae hypothesis in hoc prae reliquis excellit, quod ex dato vnico descensu vel ascensu, simul omnes descensus et ascensus possint determinari. In aliis enim resistentiis operatio, qua hic vsi sumus, non succedit, neque ad aequationem deducit, in in qua indeterminatae a se inuicem separari possunt. Hanc ob rem vti resistentia constans est simplicissima, eamque sequitur ea, quae quadratis celeritatum est proportionalis, ita post has pro simplicissima resistentiae hypothesi est habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione celeritatum. Videtur quidem ex his parum commodi ad motum in hac resistentiae hypothesi definiendum obtineri, quia vnus descensus tanquam datus accipitur, qui autem inuentu aeque est difficilis ac quisque alius. At si plures descensus considerantur, et inter se comparantur, aequatio $dv = -g\,dx + \frac{v^4 ds}{k^2}$ reipsa tres variabiles implicat, nempe praeter v et s seu x celeritatem in puncto C, quae in variis descensibus variatur. Quare cum resolutionem huius aequationis ad hanc aequationem $du = -g\,dx + \frac{u^4 ds}{k^2}$ reduxerimus, quae ad vnicum descensum spectat, illud incommodum trium variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope istius artificii plures descensus inter se comparari possunt, quod in aliis resistentiae hypothesibus ne quidem fieri potest. Atque hinc etiam multa proble-

blemata inuersa pro hac resistentiae hypothesi resolu possunt, quae in aliis omnino tractari nequeunt.

PROPOSITIO 70.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 3.

613. *Si resistentia fuerit quam minima respecta potentiae sollicitantis absolutae, et proportionalis potestati cuicunque celeritatum determinare motum corporis super quacunque curua* AM.

Solutio.

Descendat corpus super curua AM, descensus initio in A existente; ponatur super axe verticali abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$; et potentia perpetuo deorsum trahens $= g$. Sit celeritas in M debita altitudini v et resistentia ibidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita vt resistentia sit proportionalis potestati exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$; at quia resistentia ponitur valde parua, erit terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$ vehementer exiguus, atque propterea $v = gx$ quam proxime. Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$ erit $v = gx - \frac{g^m}{k^m} \int x^m ds$

et-

atque fimili modo adhuc propius $v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int x^{m-1} ds \int x^m ds$. Quae integralia ita funt accipienda vt euanefcant pofito $x=o$. Hinc ergo erit $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m gx\sqrt{gx}} - \frac{mg^{2m}\int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m}g^2 x\sqrt{gx}} + \frac{3g^{2m}(\int x^m ds)^2}{8k^{2m}g^2 x^2\sqrt{gx}}$. Atque tempus defcenfus per AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds$. q. pr. At fi defcenfus ad fixum punctum C vsque defideretur, initio defcenfus ex puncto E facto, ponatur puncti E fupra C altitudo verticalis $CD=a$; abfciffa $CP=x$ et arcus $CM=s$; quibus pofitis hic cafus ad fuperiorem reducetur, fi ibi loco x ponatur $a-x$ et $-ds$ loco ds. Quare fi altitudo celeritati in M debita vocetur v, erit $v = g(a-x) + \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds$; q. p. Haec vero integralia ita funt accipienda vt euanefcant pofito $x=a$. Atque tempus per arcum EM eft $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$. q. pr. vbi iterum omnia integralia ita funt capienda, vt euanefcant pofito $x=a$. Similí modo fi corpus ex C fuper curua CME afcendat tanta celeritate, qua ad

Fig. 2.

punctum E vsque pertingere possit, caedem aequationes locum habebunt si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob rem erit $v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int(a-x)^{m-1} ds \int(a-x)^m ds$, q. p. atque tempus ascensus per $ME = -\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int(a-x)^m ds$ q. pr. omnibus his integralibus quoque ita acceptis, vt euanescant posito $x = a$. Atque hoc modo tam descensus corporis super curua quacunque, quam oscillationes super curua idonea in medio rarissimo poterunt determinari. Q. E. I.

Corollarium 1.

Fig. 3. 614. Apparet ex his, quod quidem per se intelligitur, si corpus in medio resistente super curua AM descendat, fore celeritatem in M minorem, quam si corpus in vacuo super eadem curua descendisset. Atque tempus in medio resistente maius est, quam tempus descensus per AM in vacuo.

Corollarium 2.

Fig. 2. 615. Altitudo celeritati in puncto infimo C debita prodibit, si in expressione ipsius v ponatur $x = o$. Hoc autem facto fit $v = ga + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$ q. pr. posito post integrationem su-

pra

pra praescripto modo peractam $x=o$. At si $(a-x)^m ds$ ita capiatur vt euanescat posito $x=o$, tum erit in puncto C, $v=ga-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si post integrationem ponatur $x=a$. Id quod ad descensum pertinet.

Corollarium 3.

616. At pro ascensu celeritas corporis in C qua ad E vsque ascendere valet debita erit altitudini $=ga+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si hoc integrale ita accipiatur vt euanescat posito $x=o$, atque post integrationem ponatur $x=a$.

Corollarium 4.

617. Sit altitudo debita celeritati in $C=b$ quam iam descendendo per EMC acquisiuit, et qua iterum super eadem curua ascendet; ponatur altitudo DC descensu percursa vt ante a, et altitudo ad quam quam ascensu pertinget $a-d$, erit d quantitas valde parua; atque ideo $b=ga-\frac{g^m}{k^m}$ $\int(a-x)^m ds=ga-gd+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, et $d=\frac{2g^{m-1}}{k^m}$ $\int(a-x)^m ds$. Vel etiam. $d=\frac{2ga-2b}{g}$.

Corollarium 5.

618. Quia tempus descensus per EM est $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$ his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $x=a$; erit tempus per $CM = \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$, si integralia ita accipiantur vt euanescant posito $x=o$. Atque simili modo in ascensu erit tempus per $CM = \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}$ $\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$.

Corollarium 6.

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus per CME habebitur, si in his posterioribus formulis ponatur post integrationem $x=a$.

Scholion.

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis super data curua inueniendum pertinent, progredior ad quaestiones inuersas, in quibus ex aliis datis, quae incognita sunt, inuestigantur. Et primum quidem occurrunt huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis seu scala celeritatum datur, et curua quaeritur, quae motum illi scalae conuenientem producat in medio

dio quocunque resistente; potentiam vero absolutam vt hactenus constantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71.
Problema.

621. *In medio, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, inuenire curuam* AM, *super qua corpus ita descendat, vt in singulis punctis* M *celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis sit applicatae respondenti* PL *datae curuae* BL.

Tab. XIII. Fig. 4.

Solutio.

Posita $AP = x$ et $PL = v$ dabitur aequatio inter x et v propter curuam BL datam. Iam sit arcus $AM = s$, et exponens rationis multiplicatae celeritatum $2m$, cui resistentia est proportionalis; quibus positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$; denotante g potentiam vniformem deorsum trahentem et k exponentem resistentiae. Ex hac igitur aequatione est $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, quae quia v per x dari ponitur, variabiles habet a se inuicem separatas, atque idcirco sufficit ad curuam quaesitam AM construendam. At quia ds semper maius esse debet quam dx; ne curua AM fiat imaginaria, oportet vt sit $gk^m dx - k^m dv > v^m dx$, seu

 $dx >$

$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Namque vbi eſt $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ibi curuae AM tangens fit verticalis; et vbi $dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$, ibi curua AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

Corollarium 1.

622. Cum vbi curuae BL tangens eſt verticalis, ſit $dv = o$, erit in loco reſpondente curuae AL, $ds = \frac{gk^m dx}{v^m}$, in quo puncto corpus deſcendens maximam vel minimam habebit celeritatem. Ne igitur hoc curuae AL punctum ſit imaginarium, oportet ſit $gk^m > v^m$, ſeu $v < k\sqrt[m]{g}$.

Corollarium 2.

623. Si curua BL alicubi incidat in axem AP, vt ibi ſit $v = o$; erit in loco curuae AM reſpondente $ds = \infty$; ſi quidem m fuerit numerus affirmatiuus. Hoc ergo loco curua AM habebit tangentem horizontalem, in quam curua definet.

Corollarium 3.

624. Habeat curua AM alicubi tangentem horizontale, m euaneſcet illo loco dx prae ds. Quamobrem erit $ds = \frac{-k^m dv}{v^m}$. Ex quo apparet

in loco curuae BL respondente applicatas decrescere debere, atque ibi curuae BL tangentem fore horizontalem, quia dv infinities quoque maius erit quam dx.

Corollarium 4.

625. Curuae AM tangens, vt vidimus, est verticalis, vbi est $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Quo igitur curua in initio A, vbi celeritas sit nulla, habeat tangentem verticalem, oportet vt ibi sit $dv = gdx$, seu $v = gx$. Hoc ergo casu tangens anguli, quem curua BL in A cum AP constituet, erit $= g$.

Corollarium 5.

626. Cum sit $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}$. Quocirca tempus descensus per AM erit $= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}$.

Scholion 1.

627. Si curua BL super AB ascenderet, tum curua AM quoque sursum vergeret; atque loco descensus problemati satisfaceret ascensus super

per

per illa curua. Fit enim hoc casu abscissa x negatiua ideoque et eius elementum dx; quamobrem habebitur ista aequatio $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$ quae oritur ex aequatione $dv = -g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ naturam ascensus continente. Simili modo si curua BL ita est comparata, vt rursus ascendat; tum curua AM quoque sursum dirigetur; et partim descensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

Exemplum I.

628. Si quaeratur curua AM super qua corpus aequabiliter moueatur celeritate scilicet altitudini b debita; erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit $ds = \frac{gk^m dx}{b^m}$. Vnde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam, et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet fore $= \frac{b^m}{gk^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b, seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP, atque si fuerit $b^m = gk^m$, tum linea quaesita ipsa erit verticalis AP. At si b^m maior proponeretur quam gk^m, tum solutio perduceret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior

maior finu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM defcenfu abfoluitur, erit $= \frac{gk^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

629. Quaeratur curua AM fuper qua corpus ita defcendat, vt eius celeritas in fingulis punctis fit vt radix quadrata ex altitudine AP, quae eft proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$, et $dv = \alpha dx$; hisque fubftitutis habebitur $ds = \frac{gk^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m}$ et $s = \frac{(g-\alpha)k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m}$, vbi conftantis additione non eft opus fi $m < 1$. At fi $m = 1$. curua eft tractoria fuper linea horizontali per A transeunte defcripta; fuper qua corpus ab infinita diftantia, concurfu fcilicet tractoriae cum afymtoto, defcenfum incipit. Simili modo fi $m > 1$, curua formam habebit tractoriae fimilem. Semper autem effe debet $\alpha < g$; ex quo perfpicitur corpus in medio refiftente non tantam acquirere poffe celeritatem quantam in vacuo. Deinde quia ds maius effe debet quam dx, erit $(g-\alpha)k^m > \alpha^m x^m$; corpus igitur profundius defcendere nequit, quam per altitudinem $= \frac{k}{\alpha} \sqrt[m]{(g-\alpha)}$; quo loco curuae tangens erit verticalis, curuaque punctum reuerfionis habebit. Tempus autem, quo corpus per arcum

AM descendit est $= \int \frac{ds}{\sqrt{\alpha x}} = \frac{2(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)a^{m+\frac{1}{2}}}$. Quare nisi sit $m < \frac{1}{2}$ tempus non potest esse finitum; sed est infinite magnum; nam si $m = \frac{1}{2}$ curua erit cyclois deorsum versa, super cuius vertice A corpus perpetuo permanebit.

Corollarium 6.

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non vltra datum punctum posse continuari, ita vt celeritates semper sint in subduplicata ratione altitudinum.

Corollarium 7.

631. Ex his apparet omnes curuas hoc modo inuentas habere in A tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in A est finitae magnitudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi sit infinite paruus, quod euenit si $m < \frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit; id quod ex eo, quod tempus sit finitum, intelligitur.

Scholion 2.

632. Si corpus ex A descensum incipiat, atque curuae AM in A tangens non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia est nulla, erit ergo ibi $dv = g dx$. Quamobrem quo loco AM curua prodeat non habens in A tangentem

tem horizontalem, curua BL, quae in A conueniet cum AP, ita debet esse comparata, vt in ipso initio sit $v = gx$; seu tangens curuae BL in A cum axe AP angulum constituere debet, cuius tangens sit $= g$; alioquin enim curua AM non angulum acutum cum AP conficeret. Magis autem descendendo semper esse debet $v < gx$, in medio enim resistente celeritas ex quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur, quia enim linea verticalis est breuissima, et citissime descensu absoluitur, corpus quam minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curua BL ita debet esse comparata, vt v vbique sit minor, quam altitudo debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Vbi enim v hanc altitudinem superat, ibi curua AM fit imaginaria.

Scholion 3.

633. Simili modo res se habet si pro ascensu detur curua BLD, cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corporis ascendentis super curua inuenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP = x$; $PL = v$ et $AM = s$, erit $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$. Ne igitur ds fit negatiuum,

Tab. XIII. Fig. 5.

oportet, vt dv habeat valorem negatiuum, i. e. vt curua BL continuo ad axem AD conuergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curuae BL vbique cum axe AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $=g$. Neque vero hoc sufficit, sed praeterea $-dv-gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$; seu $-dv > \frac{(gk^m+v^m)dx}{k^m}$, siue differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Haec postrema conditio huc redit, vt PL sit minor, quam altitudo debita celeritati, quam corpus in P haberet, si ex A celeritate alt. AB debita, per AP ascendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. In ipso autem puncto D, angulus ADB tantus esse debet vt eius tangens sit $=g$; quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus euanescit: sin vero iste angulus esset maior, curua AME in E tangentem haberet horizontalem, vti in praeced. scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 6.

634. *Si detur curua* AM *super qua corpus in vacuo moueatur; inuenire curuam* am, *super qua corpus*

pus in medio resistente ita descendat, vt celeritas in a *aequalis sit celeritati in* A, *et sumtis arcubs* A M *et* a m *aequalibus, vt celeritates in singulis punctis* M *et* m *sint quoque aequales.*

Solutio.

Ductis axibus verticalibus AP et ap, et horizontalibus MP, mp; sit $AM = am = s$; $AP = t$, et $ap = x$; propter curuam AM datam dabitur aequatio inter s et t. Iam sint celeritates in punctis A et a debitae altitudini b, et celeritates in M et m debitae altitudini v. Sit potentia absoluta deorsum sollicitans g, et resistentia vt potestas exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit pro motu in vacuo super curua AM, $dv = -gdt$, seu $v = b - gt$; et pro descensu in medio resistente super curua ma erit $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$; in qua aequatione si loco dv et v substituantur valores ex priori aequatione inuenti, prodibit $-gdt = -gdx + \frac{(b-gt)^m ds}{k^m}$; seu $dx = dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$. Quia autem datur aequatio inter t et s; si loco t eius valor in s substituatur, habebitur aequatio inter x et s pro curua quaesita am. Q. E. I.

Corollarium 1.

635. Si in curua AM punctum B fuerit initium descensus, ideoque eius altitudo supra $A = \frac{b}{g}$; habebitur quoque in curua *am* initium descensus *b*, sumendo arcum $amb = AMB$.

Corollarium 2.

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$: quare altitudo *ap* maior erit quam altitudo AP; in medio enim resistente maiore opus est altitudine ad candem celeritatem generandam quam in vacuo.

Corollarium 3.

637. Quia in curuis AM et *am* sumtis aequalibus arcubus, celeritates in illis locis sunt aequales; tempora quoque, quibus aequales arcus AM et *am* describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per *bma* aequale est tempori descensus in vacuo per BMA.

Corollarium 4.

637. Ne curua *bma* fiat imaginaria, oportet vt sit vbique $dx < ds$. Hanc ob rem debet esse $dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m} < ds$ seu $gk^m dt < gk^m ds - (b-gt)^m ds$. Hoc autem ita se habet si fuerit gk^m

dt

$< (gk^m - b^m) ds$, qui est casus si t euanescit et pertinet ad punctum a, nisi t alicubi habeat valorem negatiuum. Quocirca ad hoc tantum est respiciendum vt punctum a fiat reale, quod euenit si $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m - b^m) ds$.

Corollarium 5.

639. Ne igitur curua am fiat imaginaria, ante omnia necesse est, vt sit $b < k\sqrt[m]{g}$. Sit in puncto A $ds = \alpha dt$, erit α numerus vnitate maior; et ideo erit $gk^m < \alpha(gk^m - b^m)$ seu $b < k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$. Si ergo curua MA in A habeat tangentem horizontalem debet esse $b < k\sqrt[m]{g}$ propter $\alpha = \infty$.

Corollarium 6.

640. Sit autem, si fuerit $ds = \alpha dt$ in puncto A, $b^m = \frac{g(\alpha-1)}{\alpha} k^m$; erit in ipso puncto a, $dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)ds}{\alpha} = ds$. Hoc ergo casu curua am in a tangentem habebit verticalem.

Corollarium 7.

641. In initio motus in B fit $b = gt$, seu $t = \frac{b}{g}$. Pro puncto b igitur erit $dx = dt$ curuarum elementis sumtis aequalibus: Quare tangentes in punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

Scho-

Scholion I.

642. Quia curua *am* non abſolute ex curua AM conſtrui poteſt, ſed praeterea noſſe oportet celeritatem in puncto A ſeu deſcenſus initium B; ſi in curua AM aliud deſcenſus initium accipiatur, alia inuenietur curua *am*. Curuae ergo BMA et *bma* ratione vnici deſcenſus tantum ita congruunt, vt celeritates aequalibus percurſis ſpatiis ſint inter ſe aequales; et ſi in aliis punctis initia deſcenſus ponantur, haec conuenientia non amplius locum habebit. Non igitur dantur duae curuae ſuper quibus deſcenſus omnes ad datum punctum vsque inter ſe congruant, altera in vacuo altera in medio reſiſtente conſtituta.

Exemplum I.

642. Sit AMB[1] linea recta vtcunque inclinata ita vt fit $s = at$; et quaeratur curua *amb* ſuper qua corpus ſimili modo progrediatur in medio reſiſtente, quo ſuper AMB in vacuo. Poſito autem $\frac{s}{a}$ loco t prodibit ſequens aequatio inter x et s pro curua quaeſita *amb*: $dx = \frac{ds}{a} + \frac{(ab-gs)^m}{ga^m k^m} ds$, cuius integralis eſt $x = \frac{s}{a} + \frac{ab^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} - \frac{(ab-gs)^{m+1}}{(m+1)g^2 a^m k^m}$. Ne punctum a fiat ima-

imaginarium oportet vt $\frac{1}{\alpha} + \frac{b^m}{gk^m} < 1$. Nam si fuerit $b^m = \frac{(\alpha - 1)gk^m}{\alpha}$ curua in a habebit tangentem verticalem; neque propterea b maiorem habere poterit valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta altitudine descendisse, vt fiat $b = k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$, erit $dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(k\sqrt[m]{g\alpha^{m-1}(\alpha-1)} - gs)^m ds}{g\alpha^m k^m}$, quae est aequatio pro curua amb, in qua initium descensus in b est capiendum, vbi est $ds = \alpha dx$, seu arcus amb erit $= k\sqrt[m]{\frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{g^{m-1}}}$. Si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$, ideoque $dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(gk(\alpha-1) - gs)ds}{g\alpha k} = ds - \frac{sds}{\alpha k}$ et integrando $x = s - \frac{ss}{2\alpha k}$. Quae est aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli generatoris diameter est $\frac{\alpha k}{2}$.

Corollarium 8.

644. Sit ergo super basi horizontali CB descripta cyclois AMB circulo generatore ANC, et sit medium resistens in duplicata ratione celeritatum, cuius exponens sit $= k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda $AN = \frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM, et ex M tangens MT: atque duo corpora ponantur descendere alterum

Tab. XIII. Fig 7.

ſuper MT in vacuo et alterum ſuper curua MB in medio reſiſtente, ambo haec corpora aequalibus temporibus aequalia ſpatia abſoluent.

Exemplum 2.

Fig. 6

645. Sit curua AMB cyclois deorſum ſpectans, cuius circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$ atque $dt = \frac{sds}{a}$. His ergo ſubſtitutis prodibit pro curua amb ſequens aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m}$; vel ſi totus arcus AMB, qui in vacuo deſcenſu abſolui ponitur, vocetur c erit $b = \frac{gcc}{2a}$; ideoque pro curua amb orietur iſta aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1}(cc-ss)^m ds}{2^m a^m k^m}$. Ne igitur haec curua in puncto a fiat imaginaria, oportet ſit $g^{m-1} c^{2m} < 2^m a^m k^m$, vel altitudo arcus AB minor eſſe debet quam $\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$; nam ſi fuerit altitudo arcus $AB = \frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$, tum curuae amb tangens in b erit verticalis. Si ergo B ſit cuſpis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ ſeu $c = a$: et ſi ſit praeterea $g^{m-1} a^m = 2^m k^m$, quo curuae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur iſta aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{(aa-ss)^m ds}{a^{2m}}$; quae curua in duobus punctis a et b habebit tangentes verticales.

Co-

Corollarium 9.

646. Cum igitur corpus in vacuo super cycloide ita descendat, vt eius accelerationes sint spatiis percurrendis proportionales; eandem proprietatem habebit descensus in medio resistente super curua *bma*, si initium descensus sumatur in puncto *b*, quod per aequationem ad curuam *amb*, determinatur, erit scilicet $amb = c$.

Corollarium 10.

647. Si in curua AMB aliud descensus initium B capiatur; tota curua *amb* alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$ continetur. Quare etiamsi cyclois sit curua tautochrona in vacuo, curua *amb* talis tamen non erit in medio resistente: quia pluribus descensibus super AMB totidem curuae diuersae in medio resistente respondent.

Scholion 2.

648. Curuae hoc exemplo erutae sunt eae ipsae, quas Clar. Hermannus in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis resistentibus inuenit; sed simul ipse demonstrauit eas quaesito satisfacere non posse. Ceterum ex his intelligitur, simili modo in medio resistente curuam posse inueniri, super qua corpus ascendendo eodem modo moueatur, quo super dato curua in vacuo. Sint

enim puncta Ac t a initia ascensus illud in vacuo hoc in medio resistente; sitque celeritas initialis debita altitudini b; habebitur pro curua amb ista aequatio $dx = dt - \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$; ex qua aequatione intelligitur, curuam amb non fieri posse imagiuariam, nisi ipsa curua AMB talis fuerit. Nam quia; ne curua amb sit imaginaria, esse debet $dx < ds$; hic dx minus est quam dt, quod per se minus est quam ds. Vt si linea AMB sit linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam posita $AB = c$, erit $b = gc$, et $s = t$; quare pro curua amb inuenitur ista aequatio $dx = ds - \frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m}$, cuius integralis est $x = s + \frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}$. Accommodetur haec aequatio ad resistentiam quadratis celeritatum proportionalem fiet $m = 1$, ideoque erit $x = s + \frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k}$, quae est ad cycloidem hoc modo: describatur cyclois AMB circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$, super basi horizontali BC, tum capiatur arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si corpus MA ascendat celeritate altitudini gc debita, in medio resistente in duplicata ratione celeritatum eodem modo mouebitur, quo in vacuo eadem celeritate initiali sursum ascendens verticaliter.

Fig. 7.

PRO-

PROPOSITIO 73.
Problema.

649. *Si potentia fuerit vniformis et deorsum directa, mediumque in ratione quacunque multiplicata celeritatum resistat; determinare curuam* AM, *super qua corpus descendendo secundum horizontalem* AH *aequabiliter progrediatur.*

Tab. XIV. Fig. 1.

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, per quod ducatur axis verticalis AP; celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita altitudini b. Sumatur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$; sitque corporis in M celeritas debita altitudini v; qua celeritate corporis elementum $Mm = ds$ percurret. Erit ergo vt ds ad dy ita corporis celeritas per Mm, quae est vt $\sqrt{v}$ ad celeritatem horizontalem $\sqrt{b}$, vnde oritur $v = \frac{bds^2}{dy^2}$. Iam sit potentia sollicitans $= g$; exponens resistentiae k, et ipsa resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$. His positis erit $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio, si loco v valor $\frac{bds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam curuae quaesitae. Sit autem $ds = pdy$, erit $v = bp^2$ et $dx = dy\sqrt{(p^2-1)}$. Quocirca habebitur $2bpdp = gdy \sqrt{(p^2-1)} - \frac{b^m p^{2m+1} dy}{k^m}$, quae separata dat $dy =$

 2bk

$\frac{2bk^m p\,dp}{gk^m \sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Curuae igitur quaesitae sequens erit constructio; sumto $y = \int \frac{2bk^m p\,dp}{gk^m \sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$ erit $x = \int \frac{2bk^m p\,dp\sqrt{(p^2-1)}}{g^m \sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$, atque per v definiantur y et x, erit $y = \int \frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ atque $x = \int \frac{k^m dv\sqrt{(v-b)}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$. Similique modo hinc erit arcus $s = \int \frac{k^m dv\sqrt{v}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$. Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit $ds = \frac{dy\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$ et $dx = \frac{dy\sqrt{(v-b)}}{\sqrt{b}}$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}$.

Corollarium 2.

651. Quia aequatio $dy = \frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ est separata; ex ea solutio particularis quaesito satisfaciens erui potest, faciendo denominatorem $gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}=0$, vnde erit ipsa celeritas $\sqrt{v}$ constans. Sit ergo $v=c$ erit $\sqrt{(v-b)} = \frac{c^m\sqrt{c}}{gk^m}$;

atque

atque ideo $ds = \frac{gk^m dx}{c^m}$ pro linea recta inclinata vt supra iam inuenimus (627).

Corollarium 3.

652. Quo autem corpus data celeritate, quae debita est altitudini b horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\sqrt{(c-b)} = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$ definiri debet altitudo c. Qua inuenta habebitur inclinatio rectae satisfacientis, et celeritas corporis initialis $\sqrt{c}$ in A; qua aequabiliter per rectam descendet.

Corollarium 4.

653. Si resistentia euanescat corpusque in vacuo moueatur fiet $k = \infty$ ideoque $x = \int \frac{dv}{g}$ seu $v = g(a+x)$, atque $dy = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(ga+gx-b)}}$. Integrando ergo fiet $y = \frac{2}{g}\sqrt{b(ga+gx-b)} - \frac{2}{g}\sqrt{b(ga-b)}$ quae est aequatio pro parabola, quam corpus proiectum libere describit.

Exemplum.

654. Si medium fuerit rarissimum, atque ideo k valde magnum, erit $\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)} - v^m\sqrt{v}}$ $= \frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}} + \frac{v^m\sqrt{v}}{g^2k^{2m}(v-b)}$ q. pr. Hanc ob rem ha-

habebitur $y = \frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{bv}}{g^2 k^m (v-b)}$ et $x = \frac{v}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{v}}{g^2 k^m \sqrt{(v-b)}}$. Ex hac posteriori aequatione est quam proxime $v = gx - \int \frac{g^{m-1} x^m dx \sqrt{gx}}{k^m \sqrt{(gx-b)}}$, qui valor in aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}}$ substitutus dat aequationem inter x et y pro curua quaesita.

PROPOSITIO 74.
Problema.

Tab. XIV. Fig. 2.

655. *Inuenire curuam AM super qua corpus descendens in medio quocunque resistente aequabiliter deorsum progrediatur existente potentia absoluta uniformi et deorsum directa.*

Solutio.

Posita abscissa $AP = x$, $AM = s$, sit celeritas qua corpus vniformiter descendere debet debita altitudini b. Potentia porro vniformis deorsum directa sit g, et altitudo debita celeritati $M = v$ atque resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$, erit ergo $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Debebit autem esse vt $Mm : MN = \sqrt{v} : \sqrt{b}$, vnde erit $v = \frac{b ds^2}{dx^2}$. Ex hac ergo aequatione erit $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$, quo valore in aequatione substituto habebitur $dv = g dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}} dx}{k^m \sqrt{b}}$ seu $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$.

Quam-

Quamobrem erit $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$; $s =$ $\int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$, atque applicata PM $= y =$ $\int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$. Ex quibus aequationibus constructio curuae quaesitae conficitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur aequatio ex x, y et s tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius v commodissime poterit inueniri, isque deinceps in alterutra reliquarum substitui.

Corollarium 2.

657. Quia aequatio $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$ indetermitas a se inuicem habet separatas, poterit solutio particularis obtineri ponendo $g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}} = 0$. Hinc igitur erit $v = g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{2m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}$ ideoque $ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{m}{2m+1}} dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}$. Satisfacit ergo linea recta inclinata, si corpus data celeritate $\sqrt{v}$ super ea moueatur.

Scholion 1.

658. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solutionem praebeat particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente recta inclinata inueniri possit, super qua corpus aequabiliter moueatur, vt supra (627) ostendimus. Hic autem ipse casus vtrique problemati satisfacit; si enim corpus super recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter, quam verticaliter aequabiliter quoque promouetur; quin etiam secundum quamcunque plagam aequabiliter fertur.

Corollarium 3.

659. Pro vacuo fit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ seu $v = gx$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(gx-b)}}{\sqrt{b}}$ quae aequatio integrata dat $y = \frac{2(gx-b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$, et praebet parabolam cubicalem rectificabilem vt supra iam inuenimus.

Exemplum 1.

660. Ponamus resistentiam ipsis celeritatibus proportionalem erit $m = \frac{1}{2}$, ideoque $x = \int \frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v} = \sqrt{bk}\, l \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v}$, si initium abscissarum in eo puncto accipiatur, vbi v euanescit. Ex hac autem aequatione prodit $e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v}$ seu $v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}$

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}$

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} - 1) g\sqrt{bk} = g\sqrt{bk}, (1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})$. Valore hoc ipſius v ſubſtituto habebitur $ds = \frac{dx\sqrt{g(1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})\sqrt{bk}}}{\sqrt{b}}$
Vel cum ſit $ds = \frac{dv\sqrt{kv}}{g\sqrt{bk} - v}$, ponatur $v = u^2$ erit $ds = \frac{2u^2 du\sqrt{k}}{g\sqrt{bk} - uu} = \frac{2gkdu\sqrt{b}}{g\sqrt{bk} - uu} - 2du\sqrt{k}$, quae integrata dat $s = \sqrt[4]{g^2bk^3}\, l \frac{\sqrt[4]{g^2bk} + \sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2bk} - \sqrt{v}} - 2\sqrt{kv}$, in qua valor ipſius v ante inuentus ſubſtitui poteſt, quo prodeat aequatio inter x et s.

Exemplum 2.

661. Reſiſtat nunc medium in duplicata celeritatum ratione, erit $m = 1$; ideoque $dx = \frac{kdv\sqrt{b}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}}$ et $ds = \frac{kdv\sqrt{v}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}}$. Huius poſterioris aequationis integrale eſt $s = \frac{2k}{3}\, l \frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}}$, ex qua oritur $e^{\frac{3s}{2k}} = \frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b} - v\sqrt{v}}$; atque $v^{\frac{3}{2}} = gk(e^{\frac{3s}{2k}} - 1)e^{\frac{-3s}{2k}}\sqrt{b} = gk(1 - e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}$. Quocirca erit $\sqrt{v} = \sqrt[3]{gk(1 - e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}}$; qui valor in aequatione $dx = \frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ ſubſtitutus dat aequationem inter s et x pro curua quaeſita.

Scholion 2.

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curuas determinauimus ſuper quibus corpus motum vel ſecundum horizontem vel deorſum aequabiliter feratur, ita ſimili modo proble-

ma resolui potest, si corpus secundum quamuis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestionem, quia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem causam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingo. Adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non parum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro mediis resistentibus; quod pro vacuo propositum ne problema quidem est. Quaeritur scilicet curua super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus super quacunque curua motum in eodem loco semper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75.
Problema.

Tab. XIV. Fig. 3.

663. *Inter omnes curuas puncta* A *et* C *iungentes determinare eam* AMC, *super qua corpus ex* A *ad* C *descendens maximam acquirat celeritatem existente resistentia in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et potentia uniformi deorsum tendente.*

Solutio.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perueniat, curuae quaesitae AMC duo quaeque elementa Mm, $m\mu$ ita posita esse debent, vt corpus ea percurrendo maximum accipiat celeri-

leritatis incrementum. Nam si corpus per alia elementa $M n \mu$ maius acquireret celeritatis augmentum, maiorem quoque in C habiturum esset celeritatem. Per methodum igitur maximorum positio elementorum $M m, m \mu$ inuenietur, si elementa haec cum proximis $M n$, $n \mu$ comparentur et celeritatis augmenta, quae per vtraque generantur, inter se aequalia ponantur. Ducantur ad hoc ad axem verticalem AP *plicatae* MP, $n m p$ et $\mu \pi$ sintque elementa axis $P p$, $p \pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MF, $m g$, et in curuae elementa normales $m f$, $n g$. Iam sit potentia sollicitans $= g$, exponens resistentiae $= k$, ipsa resistentia in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, et altitudo celeritati in M debita $= v$. His positis erit incrementum ipsius v per $M m = g.\ MF - \frac{v^m M m}{k^m}$ et incrementum altitudinis celeritati debitae dum corpus per $m \mu$ progreditur $= g.\ m G - \frac{(v + g.\ MF - \frac{v^m.\ Mm}{k^m})^m m \mu}{k^m}$. Dum ergo corpus elementa $M m$ et $m \mu$ conficit altitudo v accipit augmentum $= g\,(MF + m\,G) - \frac{v^m.\ Mm}{k^m} - \frac{(v + g.\ MF - \frac{v^m}{k^m} Mm)^m m \mu}{k^m}$. At elementa $M n, n \mu$ percurrendo accipiet v augmentum $= g(MF + mG) - \frac{v^m.\ Mn}{}$

$\frac{v^m Mn}{k^m} - \frac{(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn)^m n\mu}{k^m}$. Quibus sibi aequalibus positis habebitur $o = v^m (Mn - Mm) + (v + g.MF - \frac{v^m}{k^m}.Mn)^m n\mu - (v + g.MF - \frac{v^m}{k^m}.Mm)^m m\mu$. Est vero $Mn - Mm = nf$ et $(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn)^m = v^m + mgv^{m-1} MF - \frac{mv^{2m-1}}{k^m} Mn$ atque $(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m}.Mm)^m = v^m + mgv^{m-1}.MF - \frac{mv^{2m-1}}{k^m} Mm$. Nunc vero his valoribus substituendis proueniet haec aequatio $v(nf - mg) - mg.MF.mg + \frac{mv^m}{k^m}(Mn.n\mu - Mm.m\mu) = o$. At est $Mn.n\mu - Mm.m\mu = m\mu.nf - Mm.mg$, atque ob triangula nfm, mFM et mgn, μGm similia est $nf = \frac{mF.mn}{Mm}$ atque $mg = \frac{\mu G.mn}{m\mu}$. His substitutis et per mn diuiso prodit $v(\frac{mF}{Mm} - \frac{\mu G}{m\mu}) - mg.\frac{MF.\mu G}{m\mu} + \frac{mv^m}{k^m}(\frac{m\mu.mF}{Mm} - \frac{Mm.\mu G}{m\mu}) = o$. Huius aequationis duo priora membra sunt differentialia primi gradus, tertium vero, quia differentiali secundi gradus aequi pollet, reiici potest; fiet ergo $\frac{mg.MF.\mu G}{m\mu} + v(\frac{\mu G}{m\mu} - \frac{mF}{Mm}) = o$, siue $\frac{mg.MF.mF}{Mm} + vd.\frac{mF}{Mm} = o$. Ex qua aequatione determinatur positio elementorum Mm et $m\mu$.

$m\mu$. Quo autem symbolis vtamur, fit $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ erit $Pp = p\pi = dx$, $mF = dy$, et $Mm = ds$, prodibitque $\frac{mgdxdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} = o$. Aequatio vero canonica est $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, in qua si loco gdx ex superiore aequatione substituatur $\frac{-vds}{mdy}$ d. $\frac{dy}{ds}$ habebitur $dv + \frac{vds}{mdy}$ d. $\frac{dy}{ds} + \frac{v^m ds}{k^m} = o$, seu $\frac{mdvdy}{ds} + v$d. $\frac{dy}{ds} + \frac{mv^m dy}{k^m} = o$. Sit $dy = pds$ et $v^{1-m} = u$, erit vt sequitur $pdu + \frac{(1-m)}{m} udp + \frac{(1-m)pds}{k^m} = o$, ex qua integrata prodit $u =$

$\frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m} \int p^{\frac{1-m}{m}} ds$. Ex hoc u obtinebitur ergo vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superiori aequatione $mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = o$ substitutus, dabit aequationem inter p et s, et consequenter inter y et s. Ad curuam autem construendam hoc modo computum instituí expedit: Posito $dy = pds$ habentur hae duae aequationes $mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = o$ et $dv = gds\sqrt{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}$. Ex illa est $ds = \frac{-vdp}{mgp\sqrt{(1-p^2)}}$ qui in hac substitutus dat $mpdv + vdp = \frac{v^{m+1} dp}{gk^m\sqrt{(1-pp)}}$. Haec diuisa per $v^{m+1} p^2$ fit integrabilis eritque integrale

1 =

$\frac{1}{v^m p} = C + \frac{V(1-pp)}{gk^m p}$ seu $v^m = \frac{gk^m}{ap+V(1-pp)}$ et v

$= \frac{k\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{(ap+V(1-pp))}}$. Quocirca erit $mg\,ds =$

$\frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+V(1-pp))}}$ et $mgdx = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p\sqrt[m]{(ap+V(1-pp))}}$

atque $mg\,dy = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+V(1-pp))}}$. Ex quibus aequationibus facile est curuam quaesitam construere. Q. E. I.

Corollarium 1.

664. Si radius osculi curuae in M versus axem directus vocetur r, erit d. $\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}$. Hocque valore substituto habetur $\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r}$ seu $\frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}$. Est vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curua moti, cuius directio est ab axe directa et $\frac{gdy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curua quaesita vis centrifuga est contraria vi normali et se habet ad vim normalem vt $2m$ ad 1, id est, vt exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis ad vnitatem.

Corollarium 2.

665. Hae igitur omnes curuae parte concaua sunt deorsum directae. Quia enim vis normalis

malis directio deorsum respicit, et radius osculi in eandem plagam tendit, concauitas curuae quoque deorsum respicere debet.

Corollarium 3.

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curua quaesito satisfaciens, erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum libere describit.

Corollarium 4.

667. Quia in aequatione $mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})}}$ indeterminatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $\alpha p+\sqrt{(1-pp)}=0$, quo casu celeritas fit infinita, et quaeuis recta satisfacit. Secunda est $p=1$, seu $dy=ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p=0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, vt corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

Exemplum 1.

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum erit $m=\frac{1}{2}$. Sumatur ex tribus inuentis

 aequa-

aequationibus ea, quae dy continet, erit $dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})^2 \sqrt{(1-pp)}}$, cuius integralis est $y = C - \frac{2gkp}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}$. Cum autem sit $p = \frac{dy}{ds}$ et $\sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds}$, erit $y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy + dx}$ seu neglecta constante C, quia curuam non immutat, erit $\alpha y dy + y dx + 2gkdy = o$. Quae aequatio per y diuisa et denuo integrata dat $\alpha y + x + 2gkly = C$. Quae est aequatio pro curua logarithmicali ea ipsa, quam Libr. I. proiectoriam in hac resistentiae hypothesi inuenimus.

Exemplum 2.

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$. Sumatur aequatio ista $ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}$. Huius autem integralis est $s = k\, l \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p}$, siue $e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p} = \frac{\alpha dy + dx}{\beta dy}$. Hinc fit $\beta e^{\frac{s}{k}} dy - \alpha dy = dx$, atque $ds = dy \sqrt{(1 + (\beta e^{\frac{s}{k}} - \alpha)^2)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, quae hanc habebit proprietatem, vt vis centrifuga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curua igitur perpetuo sursum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis centrifugae. In hac vero curua corpus ita mouebitur vt altitudo celeritati in M debita sit $= \frac{gk}{e^{\frac{s}{k}} \beta p} = \frac{gkds}{\beta e^{\frac{s}{k}} dy} = \frac{gkds}{dx + \alpha dy}$.

Scho-

Scholion 1.

670. Cum in quauis resistentiae hypothesi peculiaris ratio inter vim centrifugam et vim normalem locum habeat; vacuum autem tanquam casus cuiusque resistentiae considerari queat: sequitur in vacuo quamvis curuam satisfacere debere. Omnes enim curuae in vacuo hanc habent proprietatem, vt super iis ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates; ideoque nulla potest definiri, quae potius quam reliquae quaesito satisfaciant.

Scholion 2.

671. Notatu dignum est, quod in omnibus his curuis inuentis nusquam corporis celeritas sit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo non ita resolui potest, vt determinetur inter omnes descensus ex A ad C ex quiete factos is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni sola recta verticalis per C transiens et cum horizontali per A ducta coniuncta satisfacit. Nostra autem solutio ita est comparata, vt duorum elementorum quorumque contiguorum positionem eam definiat, quae maximum vel minimum celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea curua inuenitur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis augmentum acquirit, quam super alia quacunque curua A et C iungente, si

 cor-

corpus ex A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inuentis autem colligi potest, hac ratione eam prodire curuam, super qua minimum celeritatis incrementum generetur, vel super qua corpus motu maxime vniformi feratur. Atque hoc sensu facile perspicitur, motum ex quiete incipere non posse. Quanquam enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sunt posita, super hac verticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari celeritatem; tamen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam verticalem; sed celeritatem initialem in A facit debitam alt. $k\sqrt[m]{g}$, quae celeritas tanta est, vt non amplius augmentum accipere queat. Hac igitur celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; hacque ratione nullum, hoc est minimum capit celeritatis incrementum. Problema ergo, vt solutioni consentaneum fuisset, ita proponi debuisset; inter omnes lineas puncta A et C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima accipiat celeritatis augmenta; atque simul celeritatem initialem in A huic quaesito accommodatam definire.

Scholion 3.

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nunc huiusmodi problemata, in quibus temporum quadam lege data curuae essent inuestigandae idoneae; sed cum temporum leges plе-

raeque

raeque ad celeritatum leges possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed vnicam in hoc negotio quaestionem de curuis brachystochronis tractabo, quia ea etsi temporis praescripta est conditio ad celeritatum rationes, quas iam peruoluimus, reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis vtar, quae supra circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76.
Theorema.

673. *In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum hypothesi quacunque ea curua* AMC *est brachystochrona seu breuissimum ab* A *ad* C *producit descensum; in qua vis centrifuga est aequalis vi normali, et in eandem plagam directa.*

Tab. XIV. Fig. 4.

Demonstratio.

Quaecunque fuerint potentiae absolutae in corpus in M agentes, eae in duas inter se normamales possunt resolui, quarum altera sit $ML = P$, altera $MN = Q$. Sumto curuae elemento $Mm = ds$, ductisque perpendiculis ml, mn, sit $Ml = mn = dx$ et $ml = Mn = dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ et vis resistentiae $= R$, atque radius osculi in $M = r$, quem pono sursum directum, ita vt posito dx constante sit $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$. His positis erit $dv = Pdx + Qdy - Rds$, quia

 Pdx

$\frac{Pdx+Qdy}{ds}$ eſt vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At ſupra ex natura brachyſtochronismi ſi fuerit $dv = Pdx + Qdy + Rds$ inuenimus fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy-Qdx}{ds}$ (364), quae formulae ab hac noſtra tantum in ſigno literae R differunt, haecque in computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam ſecundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy-Qdx}{ds}$ eſt vis normalis iuxta MO agens ex vtraque vi P et Q orta. Quare ſi fuerit vis centrifuga vi normali aequalis, et in eandem plagam directa, curua erit brachyſtochrona. Q.E.D.

Corollarium 1.

674. *S*i vis normalis, quae oritur ex reſolutione potentiarum abſolutarum corpus ſollicitantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem reſolutione orta ponatur T, erit $dv = (T-R)ds$ et $\frac{2v}{r} = N$, quae duae aequationes coniunctae dabunt curuam brachyſtochronam.

Corollarium 2.

675. Quaecunque igitur fuerit reſiſtentia, erit ſemper $v = \frac{Nr}{2}$, vnde celeritas corporis ſuper brachyſtochrona facile inuenitur. Erit enim vt vis grauitatis 1 ad vim normalem N ita dimidium radii oſculi ad altitudinem celeritati in M debitam.

Scho-

Scholion.

676. Haec eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proiectorum libero, est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi normali. Discrimen autem in hoc consistit, vt in motu libero vires centrifuga et normalis sint inter se oppositae; pro curuis brachystochronis autem conspirantes. Siue in motu libero directiones radii osculi r et vis normalis N coincidunt; in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. Hanc ob rem hic sumsimus $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ cum in motu libero sit $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$.

Corollarium 3.

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem continente prodeat $v = \frac{Nr}{2}$; si hic valor vbique loco v in altera aequatione $dv = (T-R)\,ds$ substituatur, habebitur aequatio naturam curuae brachystochronae exhibens.

Corollarium 4.

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque sollicitantibus corpus potentiis, eae curuae omnes erunt brachystochronae, in quibus tota, quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PRO-

PROPOSITIO 77.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 2.

679. *In medio vniformi quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, et potentia absoluta existente vniformi et deorsum directa; determinare curuam brachystochronam* A M, *super qua corpus descendens tempore breuissimo ex* A *ad* M *perueniat.*

Solutio.

Positis in axe verticali abscissa $AP = x$, eique respondente applicata $PM = y$, arcuque curuae quasitae $AM = s$; sit g potentia deorsum sollicitans, et $\frac{v^m}{k^m}$ resistentia in M, si quidem celeritas in M fuerit debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga, quae est $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (676), sumto dx pro constante. Facta ergo aequatione est $v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}$. Aequatio vero canonica pro descensu in hoc medio resistente dat $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Prior autem aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constans abit in hanc $v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, ex qua fit $dv = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gdsdyddy}{dxdds} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gds^2}{dx} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio reducta dat $\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} - \frac{3gdy^2}{2dx}$

$\frac{3gdy^2}{2dx} = \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}$, seu $dsd^2s - 3dds^2 = \frac{g^{m-1} ds^{m-1} dy^{2m-2}}{2^{m-1} k^m dx^{m-1} dds^{m-2}}$; haecque aequatio exponit naturam curuae quaesitae. Quae aequatio quo reducatur et ad constructionem praeparetur, pono $ds = pdx$, vt sit $dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)}$, eritque $dds = dpdx$ et $d^2s = dxddp$. His substitutis habebitur ista aequatio $pddp - 3dp^2 = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dx^m (pp-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m dp^{m-2}}$. Nunc sit porro $dx = qdp$; erit $ddx = o = dqdp + qddp$ seu $ddp = \frac{-dpdq}{q}$; orieturque haec aequatio $-\frac{pdq}{q} - 3dp = \frac{g^{m-1} p^{m+1} q^m dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$ seu $\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$. Multiplicetur haec aequatio quo integrabilis fiat per mp^{-3m-1} et habebitur $-mp^{-3m} q^{-m-1} dq - 3mp^{-3m-1} q^{-m} dp = \frac{mg^{m-1} p^{-2m} dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$, cuius integralis est $p^{-3m} q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}}$. Ponatur $\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}} = P^{-m}$, erit P functio quaedam ipsius p, et proinde dabitur concessis saltem quadraturis. His igitur positis erit $p^3 q = P$, atque $q = \frac{P}{p^3}$. Quia vero est $dx = qdp$ erit $x = \int \frac{Pdp}{p^3}$

et $s = \int \frac{Pdp}{p^2}$ atque $y = \int \frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^2}$. *Unde* constructio curuae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

680. Sit A punctum in quo motus incipit atque celeritas est nulla; erit ibi $v = o$ seu $\frac{g\,ds\,dy^2}{2dx\,dds} = o$, vnde fit $dy = o$, quia ds euanescere non potest. In puncto A ergo curua habebit tangentem verticalem.

Corollarium 2.

681. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in vacuo non discrepat, curuae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est brachystochrona in vacuo non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens erit verticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite paruus.

Corollarium 3.

682. Quia in A est $dy = o$; atque est $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$, erit pro puncto A, $p = 1$. Ex data ergo curuae constructione punctum A obtinebitur, si fiat $p = 1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi vt x, s et y euanescant posito $p = 1$.

Corollarium 4.

683. Quoniam est $v = \frac{g\,ds\,dy^2}{2dx\,dds}$, erit propter $ds = pdx$ et $dds = dp\,dx$; $v = \frac{gpdx(p^2-1)}{2dp}$, atque ob

ob $dx = q\,dp$, erit $v = \frac{gPq(pp-1)}{2} = \frac{gP(pp-1)}{2p^2}$. Vnde patet v euanescere si sit $p = 1$.

Corollarium 5.

684. Radius osculi in puncto quocunque M est $= \frac{ds^3}{dx\,ddy} = \frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$. Quare ob $ds = p\,dx$ erit radius osculi $r = \frac{p^3 dx \sqrt{(p^2-1)}}{dp} = p^3 q \sqrt{(p^2-1)} = \frac{P\sqrt{(p^2-1)}}{p}$. In puncto ergo A vbi est $p = 1$ erit radius osculi $r = 0$.

Corollarium 6.

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est horizontalis; erit ibi $dy = \infty$ ideoque $p = \infty$. Punctum igitur B inuenietur ponendo $p = \infty$. Erit ergo in hoc puncto $v = \frac{gP}{2}$ et radius osculi $r = P$.

Exemplum 1.

686. Ponamus resistentiam euanescentem ita vt motus fiat in vacuo, erit $k = \infty$, ideoque habebitur $ds\,d^3 s - 3\,dds^2 = 0$. Quae aequatio diuisa per $ds\,dds$ et integrata dat $l\,dds - 3\,l\,ds = l\,C$ seu $\frac{dds}{ds^3} = \frac{1}{a\,dx} = \frac{dx}{a\,dx^2}$. Haec aequatio denuo integrata dat $-\frac{1}{2\,ds^2} = \frac{x}{a\,dx^2} + C$. Vel mutatis constantibus positoque $ds = p\,dx$; erit $-a = ppx + Cpp$, quas quia posito $p = 1$, x debet euanescere, abit in hanc $x = \frac{a(pp-1)}{pp}$ seu $p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, quae est aequatio pro cycloide vt constat.

Exemplum 2.

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$; atque $\frac{1}{p} = \frac{1}{k}\int\frac{dp}{p^2} = C - \frac{1}{kp}$. Vnde fit $P = \frac{kp}{Ckp-1} = \frac{akp}{kp-a}$. Hanc ob rem erit $x = \int\frac{akdp}{p^2(kp-a)}$ et $s = \int\frac{akdp}{p(kp-a)}$. Fit ergo $s = kl\frac{kp-a}{(k-a)p}$ atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-adx}{(k-a)ds}$ ob $ds = pdx$. Porro ergo habebitur $(k-a)e^{\frac{s}{k}}ds = kds - adx$, quae integrata dat $k(k-a)e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a)$. Vel eliminata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit $ksds - dxds - akds + akdx = 0$. At si exponentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem exprimere velimus, erit $k(k-a)e^{\frac{s}{k}} - k(k-a) = k(k-a)(\frac{s}{k} + \frac{ss}{1.2k^2} + \frac{s^3}{1.2.3k^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4k^4} + \text{etc.})$. Quae series substituta dat $\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1.2.k} + \frac{s^3}{1.2.3k^2} + \frac{s^4}{1.2.3.4k^3} + \text{etc.}$. In quouis puncto M est $v = \frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}$. Pro puncto B vero in quo tangens est horizontalis erit $s = kl\frac{k}{k-a}$, atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$ et idcirco $x = -k + \frac{kk}{a}l\frac{k}{k-a}$. Continuetur nunc curua vltra B in BNC, cuius natura vt inueniatur in axe BQ ponatur abscissa $BQ = t$, et arcus $BN = z$. His positis erit $AP = x = -k - t + \frac{k^2}{a}l\frac{k}{k-a}$ et $AMN = s = z + kl\frac{k}{k-a}$. Erit ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}e^{\frac{z}{k}}$; quibus valoribus in superiore aequatione substitutis prodibit: $k^2e^{\frac{z}{k}} = kz + k^2 + at$, seu

Tab. XIV. Fig 5.

$at =$

$at = k^2(e^{\frac{z}{k}} - 1) - kz$. Atque per feriem $at = \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3k} + \frac{z^4}{1.2.3.4k^2} +$ etc. pro curua BNC; at pro ramo BMA in quo erit arcus BM, z negatiuus erit $at = k^2(e^{\frac{-z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3.k} + \frac{z^4}{1.2.3.4.k^2} -$ etc. Curua vero BNC in C habebit quoque tangentem verticalem, quod punctum inuenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc posito $a = ke^{\frac{z}{k}} - k$, seu $z = kl\frac{a+k}{k} = $ BNC. Atque $t = $ CE $= k - \frac{kk}{a}l\frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} -$ etc. cum contra fit AD $= \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} +$ etc. Ex quo apparet punctum A esse altius positum quam punctum C; atque in A et E curuam habere cuspides seu puncta reuersionis, ita vt tam AD quam CE fint curuae diametri; id quod ex hoc intelligitur, quod fit $y = \int\frac{Pdp\surd(pp-1)}{p^2}$, vbi $\surd(p^2 - 1)$ valorem habet tam affirmatiuum quam negatiuum.

Scholion 1.

688. Infra perfpicietur hanc curuam brachyftochronam congruere cum curua tautochrona in eadem refiftentiae hypothefi. Haec vero inter motus tautochronos et brachyftochronos intereft differentia; vt ad tautochronismum obtinendum corpus in ramo CND defcendere in altero afcendere debeat, cum e contrario pro brachyftochronismo defcenfus per AMB fieri debeat. Interim tamen

 haec

haec vtriusque curuae conuenientia attentione digna videtur, cum et in vacuo eadem congruentia obferuetur.

Exemplum 3.

689. Refiftat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita vt fit $m = 2$. Habebitur ergo pro curua quaefita ifta aequatio: $dsd^3s - 3dds^2 = \frac{gds^3dy^2}{2k^2dx}$. Ad conftruendam vero curuam $\frac{1}{p^2} = \frac{g}{k^2}\int(\frac{dp}{p^2} - \frac{dp}{p^4})$; vnde fit $P = \frac{kp\sqrt{3np}}{\sqrt{g}(p^3 - 3np^2 + n)}$ atque $s = \int \frac{kdp\sqrt{3n}}{\sqrt{g}(p^4 - 3np^3 + np)}$; et $x = \int \frac{kdp\sqrt{3n}}{p\sqrt{g}(p^4 - 3np^3 + np)}$ ac $y = \int \frac{kdp\sqrt{3n}(pp-1)}{p\sqrt{g}(p^4 - 3np^3 + np)}$. Huius ergo curuae conftructio vti generalis habetur. Quia autem n numerum quemcunque denotat, fit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{kdp\sqrt{3}}{p\sqrt{g}(2p^2 - p)} = \frac{2k\sqrt{3}(2p-1)}{\sqrt{g}p} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}}$; quam conftantem ideo adiecimus, quo fiat $y = 0$ pofito $p = 1$. Atque pofito $p = \infty$ erit applicata $DB = \frac{2k(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{\sqrt{g}}$. Fit autem $p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$ atque $\sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$. Ex quo oritur $x = \int \frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}} = \int \frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(9y^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2)}}$, quae eft aequatio inter coordinatas x et y pro curua quaefita.

Scholion 2.

690. In medio, quod in fimplici celeritatum ratione refiftit, brachyftochronam fimplicius determi-

terminare non licet, quam ſtatim ex vniuerſali conſtructione conſequitur. Quamobrem hunc reſiſtentiae caſum exemplo non ſumus proſecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes propoſitiones attinet, in quibus curua quaeritur, ſuper qua corpus deſcendens citiſſime ad datam lineam ſiue rectam ſiue curuam perueniat; ea ſimili modo pro reſiſtente medio ſoluuntur, quo pro vacuo. Cum ſcilicet ex eodem puncto A innumerabiles egrediantur curuae brachyſtochronae; ex iis ea eſt eligenda, quae datae lineae ſiue rectae ſiue curuae ad angulos rectos occurrat; ſuper hac enim corpus ad iſtam lineam breuiſſimo tempore peruenire capite praec. eſt demonſtratum. Simili ratione curua, quae omnes brachyſtochronas ad angulos rectos traiicit, ab omnibus arcus abſcindet iſochronos, ſeu quos corpus deſcendens aequalibus temporibus abſoluit. Haecque omnia eodem ſe habent modo, quaecunque fuerit reſiſtentia, et quaecunque potentiae abſolutae. Problema autem brachyſtochronarum generaliſſime conceptum euoluemus.

PROPOSITIO 78.

Problema.

691. *In medio reſiſtente quocunque; et potentiis ſollicitantibus quibuscunque; inuenire curuam brachyſtochronam* AM, *ſuper qua corpus deſcendens ex* A *ad* M *citiſſime perueniat.* Tab. XIV, Fig. 6.

So-

Solutio.

Sit A motus initium; per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe habenda, in qua sumatur abſciſſa $AP = x$; cui reſpondeat applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$. Sit porro corporis in M celeritas debita altitudini v; et reſiſtentia vtcunque a celeritate pendens $= R$. Quaecunque nunc corpus ſollicitent potentiae abſolutae, earum loco duae potentiae ſubſtitui poſſunt in datis directionibus ML et MN, quarum illa axi AP ſit parallela, haec vero ad illum normalis. Vis autem corpus ſecundum ML ſollicitans ſit $= P$ et vis ſecundum $MN = Q$. Ex his viribus oritur $dv = Pdx + Qdy - Rds$. Atque natura brachyſtochronismi dat $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ (673.) denotante r radium oſculi curuae in M verſus ſuperiora directum; pro quo ergo ſumto dx conſtante ponimus $\frac{+ds^3}{dxddy}$, cum alias deberet eſſe $r = \frac{-ds^3}{dxddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus $dv = Pdx + Qdy - Rds$ et $\frac{2vdxddy}{ds^2} = Pdy - Qdx$, ſi eliminetur v, habebitur aequatio pro curua brachyſtochrona quaeſita; eſt nempe $v = \frac{Pdy.ds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$: cuius differentiale loco dv, atque ipſum v in reſiſtentia R ſubſtitutum dabit aequationem pro curua quaeſita. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

692. Aequatio pro curua, si dicto modo v eliminetur fit differentialis tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque constantes adiici poterunt, quibus effici potest vt euanescente x simul quoque y et s et v euanescant, atque praeterea curua per datum punctum M transeat.

Corollarium 2.

693. Quia igitur semper curua brachystochrona potest exhiberi, quae initium habeat in A et per datum punctum transeat; infinitae curuae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

Corollarium 3.

694. Inuenta aequatione pro curua brachystochrona AM, innotescet simul corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; erit namque $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$.

Corollarium 4.

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo corpus arcum AM absoluit; erit scilicet tempus per $AM = \int \frac{ds}{\surd v} = \int \frac{\surd 2dxddy}{\surd (Pdy - Qdx)}$; quod propter aequationem inter x et y iam inuentam poterit saltem per quadraturas exhiberi.

Corollarium 5.

696. Si igitur curua esset inuenienda, quae omnes brachystochronas ex A eductas ad angu-

los rectos traiicere deberet; tum eius lineae constructio haberetur, si ab omnibus abscinderetur $\int \frac{\sqrt{2}dxddy}{\sqrt{(Pdy-Qdx)}}$ eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curuis infinitis arcus isochroni abscinduntur, qui, quoniam omnes curuae sunt brachystochronae, terminabuntur ad traiectoriam orthogonalem.

Exemplum.

697. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis; atque exponens resistentiae vtcunque variabilis q; erit $R = \frac{v}{q}$. Cum ergo sit $dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q}$, erit integrando $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy)$. Cum autem sit $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$ erit $2dxddy\int e^{\int \frac{ds}{q}}(Pdx + Qdy) = e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2 (Pdy + Qdx)$, in qua aequatione non amplius inest v. Interim tamen haec aequatio fit differentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur, Indeterminati praeterea ipsarum P, Q et q valores in causa sunt, quo minus aequatio ad constructionem praeparari queat.

Scholion.

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curuas brachystochronas sunt deducta, latissime patent; quia, quotcunque potentiae corpus sollicitauerint, eae omnes in huiusmodi duas possunt

funt refolui; fi modo omnium directiones in eodem plano fuerint pofitae. Quamobrem in hac quoque propofitione continentur brachyftochronae pro quacunque virium centripetarum hypothefi, quas autem, quia neque concinnae, neque conftruibiles aequationes proueniunt, vlterius non perfequimur. Miffis igitur his, in quibus celeritatum quaedam lex praefcribitur, progredimur ad fequentes quaeftiones, in quibus curuae requiruntur, quae a corpore fuper iis moto datam fuftineant preffionem.

PROPOSITIO 79.

Problema.

699. *In hypothefi grauitatis vniformis, et medio vniformi, quod in ratione quacunque celeritatum refiftit, determinare curuam aequabilis preffionis AM, quae a corpore fuper ea defcendente, vbique eandem fuftineat preffionem.* Tab. XV. Fig. 1.

Solutio.

Pofitis $AP=x$; $PM=y$; $AM=s$, et celeritati in M altitudine debita $=v$; fit potentia corpus deorfum fecundum ML trahens $=g$ et vis refiftentiae in $M=\frac{v^m}{k^m}$. Erit ergo dum corpus per elementum Mm progreditur $dv=g\,dx-\frac{v^m ds}{k^m}$. Ponamus curuam deorfum effe conuexam, ita vt MR

MR ſit radii oſculi directio, atque ipſe radius oſculi $MR = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ poſito dx conſtante. Vis ergo centrifugae directio erit in normali MN; eiusque quantitas eſt $= \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$. Secundum eandem vero directionem curua premitur a vi normali ex reſolutione potentiae $ML = g$ orta, quae eſt $= \frac{g\,dy}{ds}$. Tota ergo vis qua curua ſecundum MN premitur eſt $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$; quae cum debeat eſſe conſtans ponatur ea aequalis αg, habebiturque $\alpha g\,ds^3 = g\,dy\,ds^2 + 2v\,dx\,ddy$, atque hinc $v = \frac{\alpha g\,ds^3 - g\,dy\,ds^2}{2dx\,ddy}$. Sit $ds = p\,dx$, atque $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$; erit $ddy = \frac{p\,dp\,dx}{\sqrt{(p^2-1)}}$ His ſubſtitutis erit $v = \frac{(\alpha g p^3 dx - gp^2 dx\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(pp-1)}}{2p\,dp}$ $= \frac{\alpha g p^2 dx\sqrt{(p^2-1)} - gp\,dx(p^2-1)}{2dp}$. Sit porro $dx = 2q\,dp$ erit $v = gpq(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1))$ vel $v = Pq$, poſito $gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = P$. Erit ergo $dv = P\,dq + q\,dP$ et $v^m = P^m q^m$. Quibus valoribus in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ ſubſtitutis prodibit $P\,dq + q\,dP = g\,dx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}$. Eſt vero $dx = 2q\,dp$ et $ds = p\,dx = 2p\,dq\,dp$. Quamobrem prouenier iſta aequatio: $P\,dq + q\,dP = 2gq\,dp - \frac{2P^m q^{m+1} p\,dp}{k^m}$, quae duas tantum continet variabilem p et q, quia P per p datur. Ad hanc aequationem conſtruendam ponatur $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$; quo facto obtinebitur iſta aequatio $du + \frac{2mgu\,dp}{P} = \frac{}{2mp}$

$\frac{2mp\,dp}{k^m P}$; quae ducta in $e^{2mg\int\frac{dp}{P}}$ et integrata abit in hanc $u = \frac{2me^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{k^m}\int\frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}p\,dp}{P}$. Hinc ergo inuenitur u per p, atque u inuento erit $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ atque $x = \int\frac{2\,dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $s = \int\frac{2p\,dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $y = \int\frac{2dp\sqrt{(p^2-1)}}{Pu^{\frac{1}{m}}}$. Cum autem sit $P = gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1)$ erit $\frac{g\,dp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha\sqrt{(p^2-1)}} + \frac{(1-\alpha^2)dp}{\alpha^2 p - \alpha\sqrt{(p^2-1)}}$ atque $\int\frac{g\,dp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha}l(p+\sqrt{(p^2-1)}) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha}l\frac{\alpha p - \sqrt{(p^2-1)}}{p - \sqrt{(p^2-1)}}$ et $e^{2mg\int\frac{dp}{P}} = p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}$.

Est vero $\int\frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}p\,dp}{P} = \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}p}{2mg} - \frac{1}{2mg}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}dp$.

Quocirca erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{gk^m}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}dp = \frac{p}{gk^m}$

$$- \frac{\int p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}dp}{gk^m p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}}$$

Cum igitur hoc modo ex p inueniri possit u; curuae quaesitae constructio hinc perficietur. Q.E.I.

Corollarium I.

700. Curua inuenta ergo hanc habebit proprietatem, vt in quouis puncto M prematur ver-

 fus

ſus MN vi conſtanti, quae eſt ad vim grauitatis ML, g vt α ad 1.

Corollarium 2.

701. Si pro α ſumatur numerus negatiuus, curua vbique ſecundum MR directionem priori oppoſitam aequabiliter premetur. Hoc ergo caſu curua debet eſſe concaua deorſum, quia vis centrifuga contraria atque maior eſſe debet quam vis normalis, cuius directio ſemper in MN eſt ſita.

Corollarium 3.

702. Si $\alpha = o$; tum curua prodibit, quae nullam omnino preſſionem a corpore ſuſtinet: Quae ergo curua eſt ea ipſa, quam corpus proiectum libere motum deſcribit.

Corollarium 4.

703. Si $\alpha = 1$ ſeu tota preſſio $= g$, tum curua erit conuexa deorſum vbique. Nam quia vis normalis ſola vbique eſt minor quam g niſi caſu quo $ds = dy$; vis centrifuga cum ea conſpirare debet, ideoque radius oſculi in plagam ipſi MN oppoſitam cadere.

Corollarium 5.

704. Si ponatur $k^m e^{\frac{2mg\int dp}{p}} u = 2mz$, erit $dz = \frac{\ }{e^{2mg}}$

$\frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Particularis ergo folutio, quia in hac aequatione indeterminatae funt a fe inuicem feparatae, habebitur fi ponatur $P = o$. Hinc autem fit $gp(\alpha p \surd (p^2 - 1) - p^2 + 1) = o$, feu $\alpha p = \surd (p^2 - 1)$ fiue $\alpha ds = dy$. Vnde prodit $\alpha s = y$. Satisfacit ergo recta angulum cum verticali AP conftituens, cuius finus eft α fumto 1 pro finu toto. Hoc enim cafu vis centrifuga euanefcit, et vis normalis fit $= \alpha g$.

Exemplum

705. Sit $\alpha = 1$, feu quaeratur curua, quae vbique vi $= g$ prematur; quo cafu integratio ipfius $\frac{g dp}{P}$ fimplicior euadit: erit enim $e^{\frac{2mg\int dp}{P}} = p^{2m} (p - \surd (p^2 - 1))^{-2m} = (\frac{p}{p - \surd (p^2 - 1)})^{2m} = (p^2 + p \surd (p^2 - 1))^{2m}$. Hanc ob rem erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int (p^2 + p \surd (p^2 - 1))^{2m} dp}{gk^m (p^2 + p \surd (p^2 - 1))^{2m}}$. Quae aequatio quoties $2m$ eft numerus integer integrationem admittit. Pofito enim $p^2 + p \surd (p^2 - 1) = \frac{r + 1}{2}$; erit $p = \frac{r + 1}{2 \surd r}$ atque $u = \frac{r + 1}{2gk^m \surd r} - \frac{1}{4gk^m (r + 1)^{2m}} \int \frac{(r - 1)(r + 1)^{2m} dr}{r \surd r}$. Eft autem hac pofitione $r = 2p^2 - 1 + 2p \surd (p^2 - 1)$, feu $\surd r = p + \surd (p^2 - 1)$. Vt fi fuerit $m = \frac{1}{2}$ feu refiftentia celeritatibus proportionalis erit $u = \frac{r + 1}{2g \surd kr} - \frac{1}{4g (r + 1) \surd k} \int \frac{(r^2 - 1) dr}{r \surd r}$

$\int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}}\left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+8\sqrt{r}-9}{3(r+1)\sqrt{r}}\right) = \frac{2rr+6r+6\sqrt{r}}{6g(r+1)\sqrt{kr}}$ seu mutata constante C est $u = \frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2C}{3g(r+1)\sqrt{k}}$. Posito autem loco r eius valore erit $u = \frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3gp\sqrt{k}} + \frac{C}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{k}}$. Sit $C = o$; erit $u^{\frac{1}{m}} = u^2 = \frac{(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$, et propter $P = gp(p-\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(p^2-1)})$, erit $Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p-\sqrt{(p^2-1)})(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$ atque $x = \frac{2gk}{3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gkl(3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)})$.

Scholion.

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit si $a = -1$, quo casu prodit, concaua deorsum in qua vis centrifuga contraria est et maior quam vis normalis, quippe excessus est $= g$. Eadem vero ipsa prodit aequatio, quae pro casu $a = 1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{(p^2-1)}$ debet immutari. Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in quibus aliae pressionum leges proponuntur; eae vel ad nimis prolixos calculos deducunt; vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curuas, in quibus pressio totalis sit duplo maior, quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis, esse brachystochronas, atque curuas in quibus alia obtinet ratio, supra quoque iam pertractauimus, cum curuas inuestigaremus, super quibus motus quam minime acceleraretur. Sequitur ergo, vt ad curuas inuenien-

das

das progrediamur, ſuper quibus plures diuerſi deſcenſus vel aſcenſus datam inter ſe teneant leges, quae quaeſtiones plurimum difficultatis in ſe habent. Neceſſe enim eſt ad huiusmodi problemata ſoluenda, vt celeritas corporis in ſingulis locis poſſit exprimi per quantitates, quibus curuae natura determinatur. Quod autem cum non in quauis reſiſtentiae hypotheſi poſſit perfici, vti ſupra notauimus; tales quaeſtiones tantum pro ſpecialibus reſiſtentiae hypotheſibus poterunt proponi. Praecipue ergo iſta tractatio ad reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem eſt accommodanda; quia hoc caſu aequatio canonica, qua celeritas determinatur, ſeparationem variabilium admittit, atque ipſa celeritas poteſt exhiberi. Tum etiam conſiderari poteſt reſiſtentia, quae biquadratis celeritatum eſt proportionalis; cum pro hac hypotheſi celeritas quodammodo cognoſcatur. Denique quaecunque fuerit reſiſtentiae lex, ſi modo reſiſtentia eſt valde parua, huiusmodi quaeſtiones ſolutu faciliores euadent. In his vero problematis vel ratio celeritatum, quae in diuerſis deſcenſibus ſuper eadem curua acquiruntur, inueſtigatur; vel temporum, quibus diuerſi deſcenſus aut aſcenſus abſoluuntur, ratio. Atque in vtroque genere, ex data vel temporum vel celeritatum variis deſcenſibus acquiſitarum ratione ipſae curuae ſunt inueniendae.

PROPOSITIO 80.
Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

707. *In medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, atque potentia absoluta deorsum tendente; comparare inter se celeritates in puncto* A, *quae in diuersis descensibus corporis super curua* MA *acquiruntur.*

Solutio.

Sit celeritas in A quam vno descensu acquisiuit debita altitudini b, et celeritas in M debita altitudini v. Ponantur $AP = x$, $AM = s$, potentia sollicitans in M quae sit vtcunque variabilis $= P$; atque exponens resistentiae $= k$. His positis erit $dv = -Pdx + \frac{vds}{k}$, quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ita accepto vt euanescat posito $x = o$. Sit nunc M initium descensus vbi est $v = o$, inuenietur hoc punctum ex aequatione $b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m, atque celeritas in A acquisita sit debita altitud. $b + db$. Erit ergo $b + db = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx =$ summae omnium $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ab A vsque ad m; in aequatione vero priore $\int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ significat summam omnium $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ab A vsque ad M tantum. Illa ergo summa superat hanc summam vltimo elemento $e^{\frac{-s}{k}}$

Pdx

Pdx existente $AM = s$ et $Pp = dx$. Erit ergo $db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Ex qua aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et inter celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q.E.I.

Corollarium 1.

708. Dato ergo arcu descensus $AM = s$; erit altitudo celeritati in A acquisitae debita, $b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Seu si punctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates considerantur, erit aequatio inter eas $db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx$.

Corollarium 2.

709. Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter arcus descensus et celeritates in puncto A acquisitas; inuenietur aequatio pro curua AM propositae conditioni satisfaciens.

Corollarium 3.

710. Si medium non fuerit vniforme sed difforme vtcunque, existente eius exponente $= q$; loco aequationis inuentae prodibit ista aequatio $db = e^{\frac{-\int ds}{q}} Pdx$, cuius similis est vsus.

Corollarium 4.

711. Quia valor ipsius e est vnitate maior, quippe 2,718218284, erit $e^{\frac{-\int ds}{q}}$ seu $e^{\frac{-s}{k}}$ vnitate minor;

 et

et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacuo vero esset $db = Pdx$.

Scholion I.

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus celeritate altitudini b debita ex A per arcum A M $= s$ ascendit. Tum enim erit $db = e^{\frac{s}{k}} Pdx$ vel in medio difformi $db = e^{\int \frac{ds}{q}} Pdx$. Quae formulae ex illis descensui inseruientibus inuenientur ponendo $-s$ loco $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur. Hinc apparet quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, ita fore pro ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{s}{k}}$ seu $e^{\int \frac{ds}{q}}$ est vnitate maior.

Corollarium 5.

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro descensu esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = \alpha \int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{k}} = \alpha$; seu $s =$ const. in qua aequatione nulla linea continetur.

Corollarium 6.

714. Neque etiam curua poterit inueniri, pro qua vel in descensu vel in ascensu foret $b = \int Qdx$; denotante Q functionem quamcunq; ipsarum s et x; nisi Q ita sit comparata vt $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$.

Fit

Fit enim $e^{\frac{\pm\int ds}{q}}P = Q$ et $e^{\frac{\pm\int ds}{q}}$ abit in 1 posito $s = o$.

Scholion 2.

715. Ratio huius est, quod posuimus s euanescere euanescente x; atque hanc ob rem aequatio $db = e^{\frac{\pm\int ds}{q}}Pdx$ ita debet integrari, vt euanescat posito $x = o$. Si autem b ita detur, vt db per dx exprimatur, aequatio per dx diuidi poterit. Quocirca ea ad hanc legem non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate iam gaudeat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, vt esset $db = Rds$, seu $b = \int Rds$ euanescente b facto $s = o$; tum aequatio pro curua quaesita erit $Rds = e^{\frac{\pm\int ds}{q}}Pdx$, quae semper est pro curua reali, dummodo $\int Rds$ habeat valorem affirmatiuum, prodeatque $ds > dx$ seu $e^{\frac{\pm\int ds}{q}}P > R$.

Exemplum 1.

716. Sit potentia sollicitans vniformis, seu $P = g$, et medium resistens vniforme, requiraturque curua MA hanc habens proprietatem, vt corpus in singulis descensibus ad A vsque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata ratione arcuum descensu percursorum. Erit ergo Vb vt Vs seu $b = \alpha s$; vnde fit $\alpha ds = ge^{\frac{-s}{k}}dx$ seu $\alpha e^{\frac{s}{k}}ds = gdx$

$= g\,dx$, cuius integralis est $\alpha k(e^{\frac{s}{k}} - 1) = gx$; addita constante, quo fiat $x = o$ euanescente s. Habebitur ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha k + gx}{\alpha k}$ atque $\frac{s}{k} = l(\alpha k + gx) - l\alpha k$. Quae differentiata dat $\frac{ds}{k} = \frac{g\,dx}{\alpha k + gx}$; ex quo intelligitur curuam esse tractoriam filo longitudinis k super basi horizontali a puncto A deorsum distante interuallo $\frac{\alpha k}{g}$. Construetur ergo curua hoc modo: super basi horizontali CE et filo $BC = k$ describatur tractoria BA; tum ducatur horizontalis DA a CE ad distantiam $DC = \frac{\alpha k}{g}$; quo facto satisfaciet curuae portio BA quaesito. Ponimus autem BC verticalem et B punctum tractoriae summum; ex quo intelligitur α necessario minus esse debere quam g. Si enim esset maior foret $CD > CB$, ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $\alpha = g$, punctum A in B caderet, adeoque nonnisi punctum satisfaceret. Si fuerit $\alpha = o$, punctum A infinite distaret, et corpus descendens omnem amitteret celeritatem. Cum igitur debeat esse $\alpha < g$ erit $b < gs$.

Tab. XV. Fig. 3.

Exemplum 2.

Tab. XV. Fig. 4.

717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitantis hypothesi quaeratur curua AMF super qua omnes ascensus ex puncto A facti ita se habeant; vt toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quadratis celeritatum initialium in A propor-

portionales. Erit ergo vt ante $b = \alpha s$; atque $db = \alpha ds$. Cum autem pro ascensibus sit $db = ge^{\frac{-s}{k}} dx$, erit $\alpha e^{\frac{-s}{k}} ds = gdx$, atque integrando $\alpha k(1 - e^{\frac{-s}{k}}) = gx$. Hinc igitur habetur $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{\alpha k - gx}{\alpha k}$; atque $\frac{ds}{k} = \frac{gdx}{\alpha k - gx}$ seu $(\frac{\alpha k}{g} - x)\frac{ds}{dx} = k$. Ex quo apparet curuam satisfacientem esse iterum tractoriam super basi horizontali CE filo longitudinis k constructam; sed deorsum spectantem, cuius cuspis sit in B existente $BC = k$. Sumatur autem $CD = \frac{\alpha k}{g}$; ductaque horizontali DA erit A punctum in quo ascensus omnes incipere debent. Hinc ergo quoque intelligitur α non posse esse maius quam g; quia alias punctum A foret imaginarium. At si fuerit $\alpha = g$ seu $b = gs$ incidet A in B eritque arcus quolibet ascensu percursus $= \frac{b}{g}$.

Scholion 3.

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex vniuersali formula inuenta resolui possunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaestiones pro aliis resistentiae hypothesibus, quibus solutio earum inueniri queat, affero; quoniam tales quaestiones neque iam sunt agitatae, neque satis sunt curiosae, vt earum solutiones requirantur. Ad digniora igitur progredior problemata, in quibus curuae quaerunrur tautochronae, super quibus omnes vel ascensus vel descensus aequalibus absoluantur temporibus.

PRO-

PROPOSITIO 81.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

719. *In hypothesi potentiae uniformis deorsum directae et medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum inuenire curuam tautochronam* AM, *super qua omnes descensus ad punctum* A *vsque absoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Consideretur quicunque descensus, in quo celeritas quam corpus in puncto infimo A acquirit, debita sit altitudini b. Ponantur AP$=x$; AM$=s$; altitudo celeritati in M debita $=v$; atque potentia sollicitans $=g$ et medii exponen- $=k$, ita vt resistentia in M sit ad vim grauitatis vt $\frac{v}{k}$ ad 1. His positis erit $dv=-gdx+\frac{vds}{k}$; quae aequatio integrata dat $v=e^{\frac{s}{k}}(b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx$ ita sumto vt euanescat posito x vel $s=o$. Ex hac ergo aequatione initium descensus inuenitur ponendo $v=o$ seu $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=b$. Tempus vero quo arcus MA absoluitur hinc erit $=\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\surd(b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)}$, ex quo prodibit totius descensus tempus, si post integrationem fiat $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=b$. Ponamus breuitatis gratia $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=t$, et

et $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = du$, ita vt fit tempus totius defcenfus $= \int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$, pofito poft integrationem $t = b$. Quo nunc haec expreffio perpetuo eundem obtineat obtineat valorem, debebit $\int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$ effe functio nullius dimenfionis ipfarum b et t, vt pofito $t = b$ ex formula b euanefcat. Hanc ob rem du debet effe functio dimidiae dimenfionis ipfius t tantum, quia u a b pendere non poteft. Fieri ergo neceffe eft $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ exiftente α quantitate conftante b non continente. Hoc pofito erit tempus vnius defcenfus $= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt - tt)}}$, pofito poft integrationem $t = b$. Vel pofita ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$ erit tempus vnius defcenfus $= \alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet, quomodocunque b feu defcenfus initium mutetur. Curua ergo tautochrona quaefita determinabitur ex hac aequatione $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}$, cuius integralis eft $2\alpha\sqrt{t} = 2k (1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ feu $t = \frac{k^2}{\alpha^2}(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ addita fcilicet conftante, quae faciat t euanefcere pofito $s = 0$. Cum autem fit $t = \int e^{\frac{-s}{k}} g dx$, erit $dt = e^{\frac{-s}{k}} g dx = \frac{k}{\alpha^2} (1 - e^{\frac{-s}{2k}}) e^{\frac{-s}{2k}} ds$. Ponamus $\alpha^2 g = a$ feu $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$; erit $a dx = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1) ds$, cuius integralis eft $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$, quae quidem aequationes, quia

quia variabiles s et x a se inuicem sunt separatae ad curuam construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus libera desideretur, quia ex altera aequatione est $k(e^{\frac{s}{2k}}-1)=\frac{ax+ks}{2k}$; erit hoc valore in altera substituto $axds+ksds=2akdx$. Q. E. I.

Corollarium 1.

720. Quia est $\alpha=\sqrt{\frac{a}{g}}$; erit tempus vnius descensus $=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In vacuo autem et grauitate $=1$, est tempus descensus penduli $f=\frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$ (166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est $=\frac{2a}{g}$.

Corollarium 2.

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g}=3166$ part. millesimarum pedis Rhenani, descensus absoluetur dimidio minuto secundo; hoc ergo euenit si sit $a=1583g$ scrup. ped. Rhen.

Corollarium 3.

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est $=e^{\frac{s}{k}}(b-\int e^{\frac{-s}{k}}g\,dx)=e^{\frac{s}{k}}(b-t)$ atque ob $t=\frac{gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2}{a}$ erit $v=e^{\frac{s}{k}}(-\frac{gk^2}{a}(1-e^{\frac{-s}{k}})^2)=$

$$\frac{abe^{\frac{s}{k}}-gk^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}{a}.$$

Co-

Corollarium 4.

723. Posito $v = o$, prodibit totus arcus descensus ex hac aequatione $ab = gk^2(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Si ergo arcus descensus ponatur $= f$; erit $ab = gk^2$ $(1 - e^{\frac{-f}{2k}})^2$. Quare dato arcu descensus f erit $v = \frac{gk^2 e^{\frac{s}{k}}}{a}$ $((1 - e^{\frac{-f}{2k}})^2 - (1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

724. Aequatio pro curua haec $ax = 2k^2$ $(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$ in seriem exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ conuertendo, quae est $1 + \frac{s}{2k} + \frac{s^2}{1.2.4k^2} + \frac{s^3}{1.2.3.8k^3} +$ etc. abit in hanc $ax = \frac{s^2}{1.2.2} + \frac{s^3}{1.2.3.4k} + \frac{s^4}{1.2.3.4.8k^2}$ $+$ etc. seu $2ax = \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3.2k} + \frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2} +$ etc.

Scholion I.

725. Notari hic conuenit hanc curuam simili aequatione exprimi, qua supra brachystochrona ascensui inseruiens exprimebatur; ibi enim erat $at = \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3k} + \frac{z^4}{1.2.3.4.k^2} +$ etc. (687), quae aequatio ab hac nostra pro tautochrona inuenta in hoc tantum differt, quod hic sit $2a$ quod ibi erat a, atque exponens resistentiae brachystochronae duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrona. Curua ergo brachystochrona quoque ad tautochronismum producendum accom-

modari poteſt; arcu aſcenſus deſcenſui tributo, in medio reſiſtente, cuius exponens eſt duplo minor.

Corollarium 6.

726. Ad inueniendam continuationem curuae MA vltra A poni debet s negatiuum, quo facto habebitur $ax = 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1) + ks$ vel $2ax = \frac{s^2}{1.2} - \frac{s^3}{1.2.3.2k} + \frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2} -$ etc. Quae eadem aequatio prodiiſſet, ſi k negatiuum feciſſemus. Facto autem k negatiuo deſcenſus mutatur in aſcenſum; quocirca curua MA vltra A continuata aſcenſui inſeruiet atque ſuper ea omnes aſcenſus eodem abſoluentur tempore ſcilicet $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 7.

Tab. XV. Fig 5.

727. Eadem ergo curua continua BMANC erit tautochrona tam pro deſcenſu quam pro aſcenſu. Namque ſuper arcu BMA omnes deſcenſus eodem tempore abſoluuntur, atque ſuper arcu ANC omnes aſcenſus. Quare omnes dimidiae oſcillationes, quae in arcu BMA incipiunt, erunt inter ſe iſochronae, atque tempus vnius ſemioſcillationis erit $= 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 8.

728. Si reſiſtentia euaneſcit, quo caſu k fit ∞, curua haec in cycloidem abire debet, quae eſt

eſt curua tautochrona in vacuo. Hoc ipſum aequatio per ſeriem expreſſa indicat, fit enim $2ax = \frac{s^2}{1.2}$ ſeu $4ax = s^2$ aequatio pro cycloide.

Corollarium 9.

729. Curua ergo BMANC prout cyclois habebit cuſpides verticales in B et C, ad quas inueniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro arcu BMA, $a = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ ſeu $s = 2kl\frac{a+k}{k} =$ AMB; atque eius altitudo BD erit $= 2k - \frac{2k^2}{a}l\frac{a+k}{k}$. Pro arcu aſcenſus vero ANC erit ANC $= 2kl\frac{k}{k-a}$, et CE $= \frac{2k^2}{a}l\frac{k}{k-a} - 2k$. Siue per ſeries erit BD $= a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} +$ etc. Atque CE $= a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} +$ etc.

Corollarium 10.

730. Ex his perſpicitur cuſpidem C arcus aſcenſus eleuatiorem eſſe cuſpide A arcus deſcenſus. Atque arcus ANC cuſpis in infinitum abit ſi $k = a$; et ſi $a > k$ cuſpis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet, tam BC quam CE eſſe diametros curuae inuentae.

Corollarium 11.

731. Si corpus in dimidia oſcillatione habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit arcus deſcenſus $= 2kl\frac{k\sqrt{g}}{k\sqrt{g} - \sqrt{ab}}$ ſeu per ſeriem $= \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{2gk}$

$\frac{2ab}{2gk}+\frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}}+$ etc. atque sequens arcus ascensus $=$ $2kl\frac{k\sqrt{g}+\sqrt{ab}}{k\sqrt{g}}=\frac{2\sqrt{ab}}{2gk}-\frac{2ab}{2gk}+\frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}}-$ etc.

Corollarium 12.

732. Si ergo descensus fiat ex puncto B ita vt arcus descensus sit $=AMB=2kl\frac{a+k}{k}$ erit $b=\frac{gak^2}{(a+k)^2}$, sequentis vero ascensus arcus erit $=2k\,l\,\frac{2a+k}{a+k}$.

Corollarium 13.

733. Ex aequatione pro hac curua apparet curuam in puncto A habituram esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds constante radius osculi in M sit $=\frac{dsdy}{ddx}=\frac{ds\sqrt{(ds^2-dx^2)}}{ddx}$; quia est $dx=\frac{k}{a}(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$, s erit $ddx=\frac{1}{2a}e^{\frac{s}{2k}}ds^2$ et $\sqrt{(ds^2-dx^2)}=ds\sqrt{(1-\frac{k^2}{a^2}(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}$; erit radius osculi in $M=\frac{\sqrt{(4a^2-4k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}}{e^{\frac{s}{2k}}}$. Posito ergo $s=0$ erit radius osculi in puncto infimo $A=2a$. In B vero et C radius osculi euanescit.

Corollarium 14.

734. Radius osculi non est maximus in puncto infimo A; sed per methodum maximorum maximus inuenitur in arcu ascensus, idque in puncto

cto O exiſtente $AO = 2k l \frac{k^2}{k^2 - a^2}$. In hoc enim puncto eſt radius oſculi $= \frac{2ak}{\surd(k^2 - a^2)}$. Ex quo concluditur niſi ſit $k > a$, curuaturam curuae ANC perpetuo diminui, neque punctum O usquam exiſtere.

Scholion 2.

735. Hoc igitur problemate duas inuenimus curuas, ſuper quarum altera omnes deſcenſus, ſuper altera vero omnes aſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus. Atque cum ſuper tota curua BAC omnes itus ſeu ſemioſcillationes aequalibus peragantur temporibus, ſi quidem in curuae portione BA incipiant; haec curua ad oſcillationes in fluido iſochronas faciendas eſſet idonea, ſi modo reditus quoque inter ſe eſſent iſochroni, de quo vero non conſtat. Quia autem in fluidis praeter reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem alia inſuper obſeruatur, quam momentis temporum proportionalem ſeu conſtantem eſſe probabile eſt; etiam coniunctim cum iſta reſiſtentia tautochronam determinare operae pretium eſt; quod vero facile ex praecedente effici poteſt. *Sit* enim reſiſtentia conſtans $= b$, erit pro deſcenſu $dv = -gdx + bds + \frac{vds}{k}$. Quare ſi in priore operatione tantum loco gdx vbique $gdx - bds$ ſubſtituatur, tautochrona ſatisfaciens ſimili modo obtinebitur; pro deſcenſu ſcilicet prodibit ita curua $ax = (\frac{ab}{g} - k)$ $s + 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$; atque pro aſcenſu vero haec

$ax =$

$ax = (k - \frac{ab}{g})s + 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1)$, quae curua quoque cum priore eandem curuam continuam constituit, abit enim altera in alteram ponendo s negatiuum. Notandum hic est si fuerit $k = \frac{ab}{g}$ fore curuam tautochronam tractoriam BAF asymtotam habentem horizontalem CE, quae a puncto A distet interuallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. Fili autem longitudo, quo haec tractoria describitur, est $= 2k$. Quod autem super huiusmodi curua tangentem horizontalem nusquam habente semioscillatio absolui possit, atque alicubi punctum aequilibrii A existere, mirum non est; cum, vt supra iam obseruauimus, in tali resistentiae hypothesi, corpus in loco subsistere queat decliui. His autem casibus, quibus curua vltra A descendere pergit nulli reditus atque ideo nullae oscillationes peragi possunt, quia corpus, quanquam super plano decliui ad quietem peruenire potest, tamen super eo ascendere nequit; in quouis enim curuae portionis AF puncto corpus in quiete perseuerare potest.

Scholion 3.

736. Non multo difficilior fit problematis solutio, si potentia deorsum tendens non constans, sed variabilis vtcunque P, atque exponens resistentiae etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento temporis in descensu $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\frac{\int ds}{q}}\sqrt{(b - \int e^{\frac{-\int ds}{q}} P dx)}}$. Si nunc vt ante ponatur

$\int e^{-\frac{\int ds}{q}}$

$\int e^{-\int\frac{ds}{q}} P\,dx = t$; et $\frac{dt}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}} = du$; debebit quoque esse $du = \frac{\alpha\,dt}{\sqrt{t}}$ seu $t = \frac{\alpha^2 dt^2}{du^2} = \frac{\alpha^2 P^2 dx^2}{e^{\int\frac{ds}{q}} ds^2}$. Quae aequatio denuo differentiata posito ds constante et loco dt eius valore substituto dabit $\frac{q ds^2}{2\alpha^2} = Pq\,ddx + q\,dP\,dx - 2P\,dx\,ds$ pro curua descensus isochronos habente; Huiusque curuae continua vltra **A** ascensibus inseruiet.

Scholion 4.

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistentiae quadratis celeritatum proportionalis primus ego dedi in Comment. Tomo IV. vbi eadem, qua hic, sum vsus methodo. Deinceps vero etiam Cel. *Ioh. Bernoulli* mihi per literas significauit, se quoque in eadem resistentiae hypothesi istam tautochronam reperisse; cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730. In aliis vero resistentiae hypothesibus, excepta ea, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tautochronas determinauit. Quod enim ad eas curuas attinet, quas in Act. Lips. A. 1726. tautochronarum nomine dedi; eae quaesito non satisfaciunt; vti Cel. *Hermannus*, qui primum in easdem inciderat, atque ego postea monstrauimus. Difficultas autem methodi huius tautochronas inueniendi in hoc

consistit, quod in aliis resistentiae hypothesibus celeritas non possit vniuersaliter ex aequatione canonica determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tautochronae inuestigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro mediis rarissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus tautochronae inueniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

738. *In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypothesi potentiae vniformis deorsum tendentis, determinare curuam tautochronam* AM, *super qua vel omnes descensus vel ascensus aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$; sit totus arcus descensu aliquo descriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$ altitudo celeritati in M debita sit $= v$, exponens resistentiae $= k$, atque ipsi resistentiae vis $= \frac{v^m}{k^m}$, vbi k est quantitas valde magna ita vt fractiones, quae in denominatore k plurium quam m dimensionum habent, pro euanescentibus haberi queant. His positis erit ex natura descensus $dv = -g dx +$

$v^m ds$

$\frac{v^m ds}{k^m}$. Iam si resistentia prorsus abesset, curua quaesita esset cyclois, cuius aequatio est $gx = \alpha s^2$; quia autem medium est rarissimum, curua quaesita non multum a cycloide differet; ponatur igitur aequatio pro curua quaesita haec $gx = \alpha s^2 + \frac{\beta s^n}{k^m}$. Quia vero est $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$ propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde paruum erit proxime $v = C - gx = C\alpha s^2 - \frac{\beta s^n}{k^m}$, vbi constans C ex hoc determinatur, quod si fit $s = f$ fiat $v = o$. Quocirca erit $v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n)$ quam proxime. Ponatur ergo $v = \alpha (f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + Q$, erit $dv = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m} = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)^m ds}{k^m}$, neglectis reliquis terminis qui pro v^m poni deberent; quia in iis k plures quam m in denomitatore habet dimensiones. Ex his iam sequitur fore $Q = \frac{\alpha^m}{k^m}\int (f^2 - s^2)^m ds$ integrali hoc ita accepto vt euanescat posito $s = f$. Erit ergo $v = \alpha (f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m}\int (f^2 - s^2)^m ds$;

 atque

atque hinc $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}} - \frac{\mathfrak{E}(f^n-s^n)-\alpha^m\int(f^2-s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ omittendis iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc prodibit tempus $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$

$$- \frac{\mathfrak{E}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}};$$

quod ita integratum, vt euanescat posito $s=0$; dabit tempus, quo corpus descendens arcum MA $=s$ absoluit. Totum ergo descensus tempus per arcum f obtinebitur, si post integrationem ponatur $s=f$; quod tempus debet esse constans seu ita comparatum, vt non pendeat ab f. Primus autem temporis terminus $\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$ posito post integrationem $s=f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua non amplius inest f; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. Quamobrem si duo reliqui termini ita essent comparati, vt postquam positum est $s=f$ sese destruant; quaesito foret satisfactum; haberetur enim pro integro descensus tempore haec expressio $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$; quae est constans. Debebit ergo esse $\mathfrak{E}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ $= -\alpha^m\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, posito post integrationem $s=f$. Dat autem $\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ posito $s=f$, multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $n-2$, atque alterum integrale $\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$,

posi-

posito $s = f$ dat multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $2m-1$. Fiat igitur $n = 2m+1$, atque β ita sumatur vt hae duae potestates ipsius f, quarum vtriusque exponens erit $2m-1$, sese destruant. Quo autem appareat quales coefficientes habiturae sint istae ipsius f potestates; ex casibus simplicioribus concludemus. Integratis igitur sequentibus formulis ita vt euanescant posito $s=0$, tumque facto $s=f$ reperietur $\int \frac{(f-s)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1}$; atque $\int \frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1}f^1$; et $\int \frac{(f^5-s^5)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4}{1.3}f^3$; hincque erit generaliter $\int \frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4.6.\cdots 2m}{1.3.5.\cdots(2m-1)} f^{2m-1}$, vnde erit $\beta \int \frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4.6.\cdots 2m}{1.3.5.\cdots(2m-1)} \beta f^{2m-1}$. Alterius termini coefficiens ex eadem analogia innotescet. Est enim integratione ita instituta, vt integrale euanescat posito $s=0$; per seriem $\int (f^2-s^2)^m ds = -f^{2m}(f-s) + \frac{m}{1.3} f^{2m-2} (f^3-s^3) - \frac{m(m-1)}{1.2.5} f^{2m-4} (f^5-s^5) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.7} f^{2m-6} (f^7-s^7) -$ etc. Haec igitur series in $-\frac{\alpha^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ ducta et integrata atque tum posito $s=f$, dabit $\alpha^m f^{2m-1} \left(1 - \frac{2m}{1.3} + \frac{4m(m-1)}{1.3.5} - \frac{8m(m-1)(m-2)}{1.3.5.7} + \text{etc.}\right) = \frac{\alpha^m f^{2m-1}}{2m+1}$. His igitur duobus valoribus inter se aequatis prodit $\beta =$

$\frac{1.3.5.7 \cdots (2m-1)\, a^m}{2.4.6.8 \cdots 2m(2m+1)}$, quo valore loco $\mathfrak{E}$ substituto habebitur pro curua tautochrona ad descensus pertinente, posito $\frac{1}{a}$ loco a homogeneitatis ergo, sequens aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1.3.5 \cdots (2m-1)\, s^{2m+1}}{2.4.6 \cdots 2m(2m+1) a^m k^m}$. Vel si ex x desideretur s hinc oritur ista aequatio $s = \sqrt{gax} - \frac{1.3.5 \cdots (2m-1) g^m a x^m}{2.4.6 \cdots 2m(2m+1) 2 k^m}$. Atque tempus vnius cuiusque descensus super hac curua erit $= \frac{\pi \sqrt{a}}{2}$, seu longitudo penduli in vacuo a grauitate naturali $= 1$ sollicitati, eodem tempore descensus absoluentis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curua tautochrona mutatur in aequationem pro curua super qua omnes ascensus aequalibus temporibus, tempore scilicet $\frac{\pi \sqrt{a}}{2}$ absoluuntur, si loco k^m scribatur $-k^m$. Q. E. I.

Corollarium 1.

739. Si $2m + 1 > 2$ seu $m > \frac{1}{2}$, curuae radius osculi in puncto A idem erit, qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$; scilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo casibus corpus minimum descensum absoluit eodem tempore quo in vacuo; seu descensus super infima curuae portiuncula infinite parua, idem erit in vacuo et in medio resistente si modo $m > \frac{1}{2}$.

Co-

Corollarium 2.

740. Si $m = \frac{1}{2}$ in vtroque termino s habebit duas dimenſiones. Quare radius oſculi in A non amplius erit $\frac{ga}{2}$ ſed eo erit minor. In hoc ergo medio, quod in ratione celeritatum reſiſtit; tempus deſcenſus minimi per arculum circularem maius erit quam in vacuo; hocque in data ratione.

Corollarium 3.

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$; verum tamen $> o$, radius oſculi in A erit infinite paruus; ſuper hac ergo curua in vacuo minimus deſcenſus abſolueretur tempore infinite paruo; cum in medio reſiſtente finito tempore perficiatur.

Scholion 1.

742. Quod ad hunc caſum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc quod diximus quidem ex aequatione ſequitur, quam in medio rariſſimo quaeſito plene ſatisfacere ponimus. In caſu autem quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini, ex quibus aequatio conſiſtit, etiamſi medium ſit rariſſimum non ſatisfaciunt. Duo enim termini quibus gx aequatur, conſiderari debent tanquam duo termini initiales ſeriei conuergentis, in qua ſequentes prae primis euaneſcant. Tota vero ſeries huiusmodi habebit formam $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m+1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} +$ etc. in

qua

qua exponentes ipſius s in progreſſione arithmetica progrediuntur; haecque forma partim ex analogia partim ea ipſa ratione, qua ad ſecundum terminum inueniendum vſi ſumus, colligi poteſt. Ex hac iam forma apparet curuae in puncto infimo A conditionem, ſi $m < \frac{1}{2}$ ex duobus terminis primis cognoſci non poſſe, quantumuis k ſit magnum. Quia enim exponentes ipſius s decreſcunt, in ſequentibus terminis s tandem in denominatorem migrabit, ideoque poſito $s = o$ fiet $x = \infty$, ex quo apparet curuam his caſibus in A, non terminari; neque radium oſculi in hoc loco poſſe definiri. Quod incommodum non habet locum, ſi exponentes ipſius s creſcunt.

Scholion 2.

743. Hinc igitur patet modus curuam tautochronam in medio in quacunque celeritatum ratione multiplicata reſiſtente inueniendi; etiamſi medium non fuerit rariſſimum. Cum enim aequatio pro tautochrona ſit huius formae $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} +$ etc. quemadmodum ex conditione tautochroniſmi valorem coefficientis A determinauimus; eodem modo etiam coefficientes reliquorum terminorum poterunt definiri. At propter tantopere compoſitas formulas integrales labor fere fit inſuperabilis; qui autem forte ſubleuabitur, ſi quis tantum vnicum coef-

coefficientem B vel ad fummum duos B et C determinandi operam adhibuerit, quoniam fequentes ex analogia concludi poffent. Ad haec accedit, quod haec feries in cafu, quo $m = 1$ cognita fit; quippe ex fuperioribus (724) habemus $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6k} + \frac{s^4}{48ak^2} + \frac{s^5}{480ak^3} +$ etc. quae feries ad generalem inueniendam non parum fubfidii afferet. Terminus vero B inueniri debet ex fequente aequatione $B\int\frac{(f^{4m}-s^{4m})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}A^2 \int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})^2 ds}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}A\int\frac{ds(f^{2m+1}-s^{2m+1})\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\int\frac{ds(\int ds(f^2-s^2)^m)^2}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} - mA\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}(f^{2m+1}-s^{2m+1})}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} - m\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, cuius aequationis integralia ita funt fumenda vt euanefcant pofito $s = f$, quo facto poni debet $s = 0$; atque tum valor ipfius B inuenietur. Coefficiens vero A iam cognitus eft; inuenimus enim $A = \frac{1.3.5 \cdots (2m-1)}{2.4.6 \cdots 2m(2m+1)}$. Pro cafu quo $m = 1$, fuperiorem aequationem euolui inuenique $B = \frac{1}{48}$; exiftente $A = \frac{1}{6}$, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in infinitum innotefcerent, tum haberetur quidem aequatio ferie infinita conftans pro tautochrona quaefita; quae autem fi eius lex cognita fuerit, per methodum meam feries fummandi, in aequationem terminorum numero finito conftantem transformari po-

 terit

terit. Atque hanc propemodum vnicam et tutissimam iudico methodum, cuius ope tautochronae in aliis resistentiae hypothesibus inueniri queant.

Corollarium 4.

744. Si igitur aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} +$ etc. exprimat tautochronam descensuum; ascensus tautochronos producet ista curua $gx = \frac{s^2}{a} - \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} - \frac{C s^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}}$ + etc. quae oritur ponendo k^m negatiuum.

Corollarium 5.

745. Perspicitur hinc quoties m fuerit numerus integer, toties tautochronam ascensibus inseruientem ANC esse continuam tautochronae descensuum BMA. Eadem enim aequatio oritur siue k^m siue s ponatur negatiuum.

Corollarium 6.

746 Praeterea intelligitur curuam ANC, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quo descensus super curua BMA, minus esse curuam quam BMA, et cuspidem C altius habere positam quemadmodum in medio, quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

Co-

Corollarium 7.

747. In medio quod in simplici ratione celeritatum resistit, omnes ipsius s exponentes fiunt $= 2$; ex quo sequitur tam tautochronam descensuum quam ascensuum esse semicycloides. Ea vero pro ascensu, quia s^2 minorem habet coefficientem, quam pro descensu maiore circulo erit genita; si quidem tempora ascensuum aequalia esse debeant temporibus descensuum. Interim vero eadem cyclois continua semioscillationes quoque producit isochronas, ascensuum vero tempora erunt minora quam tempora descensuum.

Scholion 3.

748. Si m est numerus integer facile ex data forma potest ipsius A valor definiri. Namque si $m = 1$ erit $A = \frac{1}{6}$; si $m = 2$ erit $A = \frac{1}{40}$ et ita porro. At si m non est numerus integer difficilius est valorem A exhibere; series enim valorum ipsius A debet interpolari. Pro fractionibus quidem, quarum denominator est 2 valor ipsius A per quadraturam circuli potest definiri. Posito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter est 1, erit vt sequitur:

$$\begin{array}{c|lllll} m & \frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{2}, & \frac{7}{2}, & \text{etc.} \\ A & \frac{1}{\pi}, & \frac{2.1}{3.2\pi}, & \frac{2.4.1}{3.5.3\pi}, & \frac{2.4.6.1}{3.5.7.4\pi}, & \text{etc.} \end{array}$$

Ex quo patet si fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$ fore $A = \frac{2.4.6 \cdots 2n}{3.5.7 \cdots (2n+1)} \frac{1}{(n+1)\pi}$, atque adeo $gx = \frac{s^2}{6} +$

2.4.6

$\frac{2.4.6 \cdots 2n. \; s^{2n+2}}{3.5.7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi a^{m} k^{m}}$ exiſtente ſcilicet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecunque autem m fuerit fractio, erit perpetuo $A = \frac{1}{(2m+1)^{2} \int dz (1-z)^{m}}$, hoc integrali ita accepto, vt euaneſcat poſito $z = 0$; atque tum poſito $z = 1$. Quemadmodum docui in Comment. A. 1730. in Diff. de progreſſionibus transcendentibus.

Corollarium 8.

749. Si nunc pro ſingulis mediis reſiſtentibus rariſſimis quaerantur tautochronae deſcenſuum eae ſe habebunt vt ſequitur:

$$
\begin{array}{l|l}
m = 0 & gx = \frac{s^2}{a} + s \\
m = \frac{1}{2} & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{\pi \sqrt{ak}} \\
m = 1 & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak} \\
m = \frac{3}{2} & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^4}{3\pi ak\sqrt{ak}} \\
m = 2 & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{3s^5}{40a^2k^2} \\
m = \frac{5}{2} & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{8s^6}{45\pi a^2k^2\sqrt{ak}} \\
m = 3 & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5s^7}{112a^3k^3}
\end{array}
$$

Ex his formabuntur tautochronae aſcenſuum; ſi vltimi termini fiant negatiui.

Scholion 4.

750. Haec igitur ſufficiant de tautochronis ſimplicibus, ſuper quibus vel omnes deſcenſus tantum

tum

tum, vel omnes ascensus aequalibus absoluuntur temporibus. Praeter has autem curuas etiam aliae tautochronarum nomine appellari possunt, super quibus vel omnes semioscillationes, vel etiam solum omnes integrae oscillationes sint isochronae; quarum curuarum numerus vti etiam in vacuo est infinitus. Quod autem ad integras oscillationes attinet, haec quaestio resistentiae propria est, in vacuo enim omnes semioscillationes inter se sunt aequales. Quia autem in his quaestionibus duae curuae inueniendae proponuntur, quarum altera ad ascensus altera ad descensus pertineat; antequam huiusmodi quaestiones pro tautochronismo soluamus, alias faciliores propositiones circa binas curuas ascensum et descensum spectantes praemittemus.

PROPOSITIO 83.

Problema.

751. *In hypothesi potentiae vniformis deorsum tendentis et medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, data curua* MA *inuenire alteram* AN *illi in* A *iungendam huius indolis; vt corpus per arcum quemcunque* MA *super curua data descendens super curua quaesita ascensu conficiat arcum* AN *, qui aequalis sit arcui* MA.

Tab. XV. Fig. 6.

Solutio.

Positis potentia sollicitante g; exponente resistentiae k, et celeritate in A, quam ex descen-

su acquisiuit, quaque super curua quaesita AN ascensum inchoat, debita altitudini b; sit pro curua data abscissa AP $= x$; arcus AM $= s$; pro quaesita vero sit abscissa AQ $= t$ atque arcus AN $= r$. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$ et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita $= e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt)$. Integer ergo arcus descensus prouenit ex hac aequatione $b = g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$; integer vero arcus ascensus ex hac aequatione $b = g\int e^{\frac{r}{k}}dt$. Inter arcus igitur descensus et ascensus haec habebitur aequatio: $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \int e^{\frac{r}{k}}dt$ seu huius differentialis $e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt$. Quare cum arcus ascensus aequalis esse debeat arcui descensus ponatur $r = s$; quo facto prodibit ista aequatio $e^{\frac{-2s}{k}}dx = dt$. Cum autem curua MA data sit, dabitur aequatio inter s et x; ex qua, si loco dx eius valor per s et ds substituatur, prodibit aequatio inter t et s seu inter t et r propter $r = s$; quae determinabit naturam curuae quaesitae AN. Q. E. I.

Corollarium I.

752. Si curuae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x = as^n$; erit pro portione infi-

infima curuae AN haec aequatio $dt = \alpha n e^{\frac{-2s}{k}} s^{n-1} ds$. Eſt vero propter s arcum minimum $e^{\frac{-2s}{k}} = 1 - \frac{2s}{k}$, vnde erit $t = \alpha s^n - \frac{2\alpha n s^{n+1}}{(n+1)k}$ ſeu tantum $t = \alpha s^n$. Portiones ergo infimae vtriusque curuae erunt inter ſe ſimiles.

Corollarium 2.

753. Ex aequatione $e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt$ intelligitur eſſe ſemper $dt < dx$ ſeu $t < x$. Punctum ergo N ſemper humilius erit poſitum, quam punctum reſpondens M. Ex quo ſequitur curuam AN minus eſſe curuam verſus AB, quam curuam AM.

Corollarium 3.

754. Hanc ob rem curua ANC non poterit eſſe ſimilis et aequalis curuae AM; quia hoc caſu puncta M et N arcus aequales AM et AN terminantia forent in eadem altitudine ſita.

Corollarium 4.

755. Si corpus ſuper curua MA ex altitudine infinita deſcenderet, quia in A celeritatem tantum finitam acquirit ad altitudinem tantum finitam aſcendere poterit. Hoc ergo caſu, quo curua AM in infinitum porrigitur, curua ANC non vltra datam altitudinem aſcendere poterit, ſed aſym-

asymtoton habebit horizontalem BC. Id quod etiam ex hoc apparet, si fit $s = \infty$; tum enim prodit $dt = o$.

Scholion I.

756. Quemadmodum ex hac propositione intelligitur, quomodo ex data curua descensuum MA inueniri debeat curua ascensuum AN; ita viciſſim hinc facile erit ex data curua AN alteram definire. Si enim detur aequatio inter t et s, erit $dx = e^{\frac{2s}{k}} dt$, aequatio pro curua AM.

Corollarium 5.

757. Quia curuae descensuum MA respondet curua ascensuum AN, cuius haec est aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Ita si haec curua AN pro curua descensuum accipiatur, erit respondentis curuae ascensuum abscissa $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dt = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$.

Corollarium 6.

758. Si hoc modo vlteriores curuae respondentes quaerantur, obtinebitur sequens aequationum series.

Abscissa curuae respondens arcui s.

$$\text{I} = x$$

$$\text{II} = \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$$

$$\text{III} = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$$

IV

$$\text{IV} = \int e^{\frac{-6s}{k}} dx$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n = \int e^{\frac{-2(n-1)s}{k}} dx.$$

Corollarium 7.

759. Huius igitur feriei duae curuae contiguae hanc habebunt proprietatem, vt, iis in infimo puncto A coniunctis, corpus fuper priori defcendens, fuper altera per arcum afcendat aequalem arcui defcenfus. Infinitefima autem huius feriei curua facto $n = \infty$, fit recta horizontalis, quia euanefcit $e^{\frac{-\infty s}{k}}$; ideoque ipfa curuae abfciffa.

Exemplum I.

760. Sit linea data recta verticalis, erit $x = s$. Pro curua ergo afcenfuum quaefita ANE exiftente $AQ = t$ et $AN = s$ habebitur ifta aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$ feu $t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Atque eliminata quantitate exponentiali erit $2tds = kds - kdt$ fiue $\frac{(\frac{1}{2}k - t)ds}{dt} = \frac{1}{2}k$. Ex qua aequatione perfpicitur curuam ANE effe tractoriam fuper afymtoto horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo afymtoti AB erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipfa tractoria ANE pro curua defcenfuum accipiatur, ei refpondebit curua quaefita, cuius abfciffa

Tab. XVI. Fig. 1.

ſciſſa arcui s reſpondens erit $=\int e^{\frac{-4s}{k}}ds$; quae ergo curua iterum erit tractoria aſymtoton horizontalem habens, cuius aſymtotos ſupra A eleuata eſt interuallo $\frac{1}{4}k$, cui longitudo fili aequatur. Seriei vero ſuperioris omnes curuae erunt tractoriae, quae filis generantur, quorum longitudines conſtituunt hanc ſeriem $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc. Recta ſcilicet verticalis tanquam tractoria conſiderari poteſt, cuius filum generans eſt $\frac{k}{0}$ ſeu infinitum. Vltima autem huius ſeriei tractoria in rectam abit horizontalem per A ductam.

Exemplum 2.

761. Si linea deſcenſuum data fuerit recta vtcunque ad horizontem inclinata MA, ita vt ſit MA (s): AP(x) $=\alpha:1$, ſeu $dx=\frac{ds}{\alpha}$; habebitur pro curua quaeſita AN iſta aequatio $\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}}ds$, cuius integralis eſt $\alpha t = \frac{k}{2}(1-e^{\frac{-2s}{k}})$. Ex quibus aequationibus coniunctis oritur $2\alpha t\,ds = kds - \alpha kdt$ ſeu $\frac{(\frac{k}{2\alpha}-t)ds}{dt}=\frac{k}{2}$. Quae aequatio quoque eſt pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ ſuper aſymtoto horizontali BD genita; exiſtente AB $=\frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A tranſire debet. Seriei ſequentes curuae omnes ſunt quoque tractoriae, vt in praecedente exemplo, quarum fila generantia ſunt $\frac{k}{0}$, $\frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$, etc. earum vero aſymtotorm a puncto

A

A diſtantiae tenent hanc progreſſionem $\frac{k}{0\alpha}$, $\frac{k}{2\alpha}$, $\frac{k}{4\alpha}$, $\frac{k}{6\alpha}$ etc. Hae ſcilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum conſtituent aequalem angulo PAM.

Corollarium 8.

762. Tractoriarum harum ea, quae primam ſeu rectam MA praecedit, hanc ergo habebit proprietatem, vt corpus ſuper ea deſcendens, poſteaque ſuper recta AM aſcendens aequalia ſpatia percurrat.

Corollarium 9.

763. Ad curuam igitur deſcenſuum CA inueniendam, cui reſpondeat recta inclinata AM; ſuper aſymtoto horizontali filo longitudinis $\frac{k}{2}$ deſcribatur tractoria CA, in eaque ſumatur applicata $Ab = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A conſtituatur recta inclinata AM; eritque CA curua deſcenſuum, cui reſpondet recta AM pro aſcenſibus.

Tab. XVI. Fig. 2.

Scholion 2.

764. Inſeruire poteſt hic caſus inſtar exempli problematis inuerſi, quo ex data curua aſcenſuum, curua deſcenſuum requiritur.

Exemplum 3.

Tab. XV. Fig. 6.

765. Sit curua descensuum data cyclois MA, cuius natura hac aequatione sit expressa $2ax = s^2$, seu circuli genitoris diameter $= \frac{a}{2}$. Erit ergo $dx = \frac{sds}{a}$, vnde pro curua altera ascensuum AN haec inuenitur aequatio $adt = e^{\frac{-2s}{k}} sds$, cuius integralis est, $at = \frac{k^2}{4}(1 - e^{\frac{-2s}{k}}) - \frac{k}{2} e^{\frac{-2s}{k}} s$, quae propter $e^{\frac{-2s}{k}} = \frac{adt}{sds}$, abit in hanc $atsds = -\frac{ak^2dt}{4} + \frac{k^2sds}{4} - \frac{aksdt}{2}$. Haec curua in A, vt iam est dictum, tangentem habebit horizontalem. Habebit vero etiam asymtoton BC horizontalem; cuius altitudo BA reperietur si s fiat $= \infty$. Fiet autem hoc casu $e^{\frac{-2s}{k}} = 0$; quare erit $t = AB = \frac{k^2}{4a}$. Ex hoc intelligitur curuam alicubi punctum flexus contrarii habere debere; quod inuenietur si posito dt constante, ponatur $dds = 0$. Hinc vero prodibit $1 = \frac{2s}{k}$ seu $s = \frac{k}{2}$. Quare si sumatur arcus $AN = \frac{k}{2}$ erit N punctum flexus contrarii; cui respondet abscissa $AQ = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2e}$ seu $BQ = \frac{k^2}{2e}$. Quo circa erit semper $AB : BQ = e : 2 = 2,71828 : 2$.

Scholion 3.

766. Problema hoc propositum extat ab anonymo in Act. Lips. A. 1728. eiusque solutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 1729. Cl. D. *Bernoulli*, alia vsus methodo. Praeter hanc

hanc vero conditionem anonymus ille potissimum requirit vnam curuam continuam, cuius alter ramus descensibus alter ascensibus inseruiat, cuiusmodi curuae dantur innumerabiles, quas in sequente propositione detegemus.

PROPOSITIO 84.
Problema.

767. *Iisdem positis vt ante, inuenire curuam continuam* MAN *huiusmodi, vt in quauis semioscillatione, quae semper in arcu* MA *incipiat, super ea facta arcus descensus* MA *aequalis sit arcui ascensus sequentis* AN. Tab. XV. Fig. 6.

Solutio.

Propositio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data fuerit curua MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod vtraque curua MA et AN vnam eandemque curuam continuam constituere debeant. Sumtis igitur arcubus AM et AN aequalibus $= s$, et posita $AP = x$ atque $AQ = t$, erit $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Quia autem curua MAN debet esse continua, aequationem inter s et x ita oportet esse comparatam, vt si in ea loco s ponatur minus $-s$, quo casu arcus AM in arcum AN abit, valor ipsius x fiat $= t$ seu $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Pono igitur

tur $dx = Mds$, vbi M sit functio quaedam ipsius s; eaque abeat in N, si loco s ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s quo casu x abit in t, eritque $dt = -Nds$. Est vero quoque $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx = e^{\frac{-2s}{k}} Mds$, quocirca erit $N = -e^{\frac{-2s}{k}} M$. Sit porro $M = e^{\frac{+s}{k}} P$, abeatque P in Q posito $-s$ loco s eritque $N = e^{\frac{-s}{k}} Q$. Quibus valoribus loco M et N substitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo apparet P huiusmodi esse debere functionem ipsius s, quae abeat in $-P$ posito $-s$ loco s, quas functiones impares appellare consueui. Sit itaque P functio quaecunque impar ipsius s, cuiusmodi sunt e.gr. αs, αs^3, αs^5 etc. eritque $M = e^{\frac{s}{k}} Pds$ seu $x = \int e^{\frac{s}{k}} Pds$. Quae est aequatio pro curua quaesita. Q.E.I.

Corollarium 1.

768. Quia est $dx = e^{\frac{s}{k}} Pds$ erit sumendis logarithmis $ldx = \frac{s}{k} + lP + lds$. Differentietur haec aequatio denuo posito ds constante, prodibitque $\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P}$ seu $kPddx = Pdxds + kdxdP$. Quae aequatio ab exponentialibus est libera.

Corollarium 2.

769. Quoniam P per s dari debet aequatio inuenta non habet variabiles inter se permixtas; quamobrem ea sufficit ad curuas in ea contentas construendas.

Exem-

Exemplum.

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$, erit $ax = \int e^{\frac{s}{k}} s\,ds = k e^{\frac{s}{k}} s - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2$, quae est aequatio pro vna et fortasse simplicissima curua satisfaciente. Haec vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in hanc $axs\,ds = aks\,dx - k^2 a\,dx + k^2 s\,ds$. Vel exposito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio $ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1.3k} + \frac{s^4}{1.2.4k^2} + \frac{s^5}{1.3.4.5k^3} +$ etc. Haec ergo curua in A habet tangentem horizontalem, eiusque radius osculi in hoc loco est a. Quia ne curua fiat imaginaria esse debet $dx < ds$ debebit esse $e^{\frac{s}{k}} s < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}} s$, quae expressio crescente s quoque crescit, aequalis a, ibi curua AM habebit tangentem verticalem atque punctum reuersionis. Pro ramo AN posito $-s$ loco $+s$ haec habetur aequatio $ax = \int e^{\frac{-s}{k}} s\,ds$, seu $dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}} s\,ds}{a}$. Quare quamdiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}} s < a$, curua non fit imaginaria. At si vsquam si $e^{\frac{-s}{k}} s = a$, ibi curua quoque habebit punctum reuersionis et diametrum verticalem. Fieri autem potest si a satis magnum accipiatur, vt $e^{\frac{-s}{k}} s$ semper minus sit quam a, quo casu curua AN in infinitum abibit, asymtotonque habebit horizontalem

lem BC. Fit autem $e^{-\frac{s}{k}} s = o$ casibus, $s = o$ et $s = \infty$, habebit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= o$, hoc vero casu fit $k = s$, et $e^{-\frac{s}{k}} s = \frac{k}{e}$. Quare si fuerit $a > \frac{k}{e}$ curua habebit asymtoton BC, cuius altitudo BA erit $= \frac{k^2}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{e}$ curua AN, vti alter ramus, habebit quoque punctum reuersionis, quod ex hac aequatione determinabitur, $a = e^{-\frac{s}{k}} s$. In priori casu curua AN habere debet punctum flexus contrarii, quod reperietur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85.
Problema.

Tab. XV. Fig. 6.

771. *In hypothesi grauitatis et resistentiae praecedenti si data fuerit curua MA, super qua descensus absoluantur; inuenire pro ascensibus curuam AN huius proprietatis, vt ascensus cuiusque tempus aequale sit tempori descensus praecedentis.*

Solutio.

Positis vt ante potentia sollicitante $= g$; et medii exponente $= k$; sit pro curua MA abscissa $AP = x$; arcus $AM = s$; atque pro curua quaesita AN, abscissa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Ponatur altitudo celeritati descensu quodam in A acquisito debita $= b$, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit alti-

altitudo celeritati in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$ et altitudo in ascensu celeritati in N debita $= e^{\frac{-r}{k}}(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt)$. Tempus ergo descensus per arcum MA erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$, et tempus ascensus per arcum AN $= \int \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{\sqrt{(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt)}}$, quae duo tempora, si post integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}}dt = b$ debent esse aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = X$; $g\int e^{\frac{r}{k}}dt = T$: atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $e^{\frac{r}{2k}}dr = dR$, vbi X, T, S et R sint tales functiones, quae euanescant posito x, s, t et $r = o$. Efficiendum ergo est, vt haec duo integralia $\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}}$ et $\int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$ fiant inter se aequalia, si post integrationem ponatur $X = b$ et $T = b$. At S et R vti et X et T sunt quantitates a b prorsus non pendentes, atque eandem inter se relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit. Quaesito ergo satisfiet, si R fuerit talis functio ipsius T, qualis S est ipsius X. Vel sumto $R = S$ esse quoque debet $T = X$. Est vero $S = 2k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}}-1)$

$-1)$; facto igitur $R = S$ erit $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$, atque $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quia autem hoc posito esse debet $X = T$ seu $e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt$ fiet $t = \int e^{\frac{-s-r}{k}}dx$. Cum vero sit $e^{\frac{r}{k}} = (2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 = 4 - 4e^{\frac{-s}{2k}} + e^{\frac{-s}{k}}$, erit $t = \int \frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}(2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2} = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$. Ex quibus ergo constructio curuae innotescit, quia sumto arcu $AN = r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ huic respondet abscissa $AQ = t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$; Aequatio vero pro curua AN commodius inuenietur ex data aequatione inter s et x. Nam quia est $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ et $x = \int \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$; si loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequatio inter t et r pro curua quaesita AN. Q. E. I.

Corollarium I.

772. Quia est $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ erit $dr = \frac{e^{\frac{-s}{2k}}ds}{(2 - e^{\frac{-s}{2k}})}$. Cum vero ne curua AN fiat imaginaria esse debeat $dr > dt$; curua AN eousque erit

erit realis, quousque $ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}(2 - e^{\frac{-s}{2k}})}$, seu $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}$.

Corollarium 2.

773. Est vero $e^{\frac{s}{2k}}$ semper maius vnitate; ex quo sequitur vbi fuerit $ds > dx$ eo magis fore $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}$. Quare si curua data fuerit realis, quaesita quoque semper erit realis.

Corollarium 3.

774. Cum sit $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ erit $ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{(2 - e^{\frac{r}{2k}})} = \frac{dr}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)}$, vnde facilius relatio inter ds et dx in computum duci potest.

Corollarium 4.

775. Ex solutione problematis simul apparet, quomodo eius inuersum sit soluendum. Si enim curua ascensuum A N datur, seu aequatio inter t et r, ex ea aequatio inter x et s formabitur ope aequationum $t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$ et $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$.

Corollarium 5.

776. Ad curuae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r valde exigua, eritque $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, vnde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo perspicitur curuarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et aequales.

Exemplum 1.

Tab. XVI. Fig. 1.

777. Sit linea descensuum data recta MA, vtcunque inclinata, vt sit $s = \alpha x$ seu $ds = \alpha dx$. Cum nunc sit $ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ et $dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$ habebitur inter t et r pro curua quaesita ista aequatio, $dr = \frac{\alpha dt}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ seu $\alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}} dr - dr$ cuius integralis est $\alpha t = 4k(1 - e^{\frac{-r}{2k}}) - r$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\alpha t = r - \frac{r^2}{1.2.k} + \frac{r^3}{1.2.3.2k^2}$ $\frac{r^4}{1.2.3.4\;4k^3} +$ etc. ideoque in puncto infimo A est $dr = \alpha dt$. Curua haec alicubi habebit tangentem horizontalem, qui locus inuenietur ponendo $dt = 0$ tum vero erit $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atque si r fiat maius quam $2kl2$ valor ipsius dt fiet negatiuus, ideoque curua iterum descendet, donec $-dt$ fiat $= dr$, hoc autem accidit, si est $1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}}$ seu $r = 2k\, l\frac{2}{1-\alpha}$

$l\frac{2}{1-\alpha}$. At quia α non poteſt eſſe minus quam 1; ſi eſt $\alpha = 1$ tangens verticalis in infinitum ab A diſtabit; atque ſi $\alpha > 1$ vltra tangentem horizontalem nusquam habebit tangentem verticalem. Sed antrorſum vltra tangentem habebit verticalem, vbi eſt $r = -2kl\frac{1+\alpha}{2}$. Caſu ergo quo linea data eſt verticalis, ſeu $\alpha = 1$ fit $r = 0$, ſeu tangens in A erit verticalis.

Corollarium 6.

778. Si s denotet totum arcum deſcenſus, r exprimet totum arcum ſequenti aſcenſu ſuper curua AN deſcriptum. Quare ſi detur arcus deſcenſus s reperietur arcus aſcenſus $r = 2kl(2 - c^{\frac{-s}{2k}})$. Quoniam enim poſuimus $T = X$ integros arcus deſcenſus et aſcenſus litterae s et r denotant.

Tab. XV. Fig. 6.

Exemplum 2.

779. Sit curua data MA ipſa tautochrona deſcenſuum, quam ante pro eadem reſiſtentiae hypotheſi inuenimus; habebit curua AN hanc proprietatem, vt omnes aſcenſus aequalibus quoque abſoluantur temporibus; iisdem nempe quibus deſcenſus ſuper MA. Quare curua AN erit ipſa tautochrona aſcenſuum cum curua MA continua iam ante inuenta. Quo hoc autem ex iſto calculo oſtendatur, ſumamus aequationem pro curua tautochrona deſcenſuum, quae eſt vel $adx = k$

 $(e^{\frac{s}{2k}}$

$(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$ vel $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$. Cum nunc sit $ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{e^{\frac{-r}{2k}}}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ atque $dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$, his ſubſtitutis erit $\frac{a\,dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2} = \frac{kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$ ſeu $adt = k(1-e^{\frac{-r}{2k}})dr$. Quae aequatio ex illa formatur, ſi pro x ponatur t atque $-r$ pro s. Quare haec curua AN eſt continua cum MA atque tautochrona aſcenſuum.

Corollarium 7.

780. Dato ergo arcu deſcenſus s ſuper tautochrona deſcenſuum; erit arcus aſcenſus ſequentis ſuper tautochrona aſcenſuum $r = 2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ſi deſcenſus a cuſpide tautochronae deſcenſuum incipiat, cuius locum dat $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{a+k}{k}$ (729.) erit arcus aſcenſus $r = 2kl\frac{2a+k}{a+k}$, vt ſupra inuenimus (732).

Scholion.

781. Cum itaque tautochrona in hac reſiſtentiae hypotheſi quaeſito ſatisfaciat atque ſit curua continua; hinc anſam arripimus inueſtigandi plures

plures curuas continuas, quarum duo rami vices curuarum MA et AN sustinere queant; id quod in sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 86.

Problema.

782. *Iisdem positis vt ante inuenire casus, quibus duae curuae* MA *et* AN, *super quibus descensus et sequentes ascensus aequalibus temporibus absoluantur, vnam curuam continuam constituunt.*

Tab. XV Fig. 6.

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedente propositione vsi sumus, scilicet $AP = x$; $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$; praeter duas aequationes ibi inuentas $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ et $e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt$ effici debet, vt aequationes inter s et x et inter r et t sub eadem aequatione comprehendantur. Sumamus ad hoc nouam variabilem z, ex qua punctum M in curua AM determinetur, ita vt si z fiat negatiuum, eodem modo obtineatur punctum N in altera curua. Hanc ob rem s huiusmodi esse oportet functionem ipsius z, vt eadem, si loco z ponatur $-z$, det arcum AN, qui ob positionem negatiuam est $-r$, ita vt s abeat in $-r$ posito $-z$ loco z. Ponatur $e^{\frac{-s}{2k}} = 1 + Q$, erit $e^{\frac{r}{2k}} = 1 - Q$ propter $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ ideo-

ideoque Q erit functio impar ipsius z, quae in sui negatiuam abit facto z negatiuo. Erit itaque $e^{\frac{-s}{k}} = (1+Q)^2$ et $e^{\frac{s}{k}} = (1-Q)^2$. Porro autem esse debet $dx(1+Q)^2 = dt(1-Q)^2$, atque x talis esse debet functio ipsius z, quae abit in t posito z negatiuo. Ponatur $dx = Mdz$, abeatque M in N facto z negatiuo, erit ergo $dt = -Ndz$. Quamobrem fiet $M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2$. Sit ergo $M = P(1-Q)^2$ existente P quoque = functioni impari ipsius z; atque tum fiet $N = -P(1+Q)^2$; ideoque aequalia inter se erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$ vti requiritur. Sumtis ergo pro lubitu loco P et Q functionibus imparibus ipsius z, erit $dx = Pdz(1-Q)^2$ seu $x = \int Pdz(1-Q)^2$ atque $s = 2kl\frac{1}{1+Q}$. Vnde innumerabiles oriuntur curuae MA, quarum partes continuae AN ascensus producunt isochronos respectiue descensibus super MA factis. Quia autem duae functiones occurrunt P et Q, determinetur altera, vt fit $Q = -z$ erit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ atque $x = \int Pdz(1+z)^2$. In quarum posteriore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ substituatur, habebiturque aequatio inter x et s pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

783. Si $z = o$, fit quoque $s = o$. Quare integrale ipsius $Pdz(1+z)^2$ ita accipi debet vt euanescat posito $z = o$. Nam euanescente arcu s abscissa quoque x euanescere debet.

Co-

Corollarium 2.

784. Cum ſit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ erit $ds = \frac{2kdz}{1-z}$, et quia eſt $dx = Pdz(1+z)^2$, erit $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)}$, niſi ergo $P(1-z)^2(1+z)$ maius fuerit quam $2k$ curua erit realis.

Corollarium 3.

785. In puncto infimo A, quia euaneſcit z, erit $\frac{ds}{dz} = \frac{2k}{P}$. Quare P talis eſſe debet functio impar ipſius z, vt ea, ſi $z = o$, minor ſit quam $2k$: hoc autem euenire non poteſt, niſi P talis fuerit functio ipſius z, quae euaneſcat poſito $z = o$, hocque caſu tangens in A erit horizontalis.

Exemplum 1.

786. Quia P debet eſſe functio impar ipſius z, ponatur $P = \frac{az}{(1-z^2)^2}$. Quo poſito erit $x = \int\frac{azdz}{(1-z)^2}$ ſeu $dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}$. Eſt vero $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $dz = \frac{1}{2k}e^{\frac{-s}{2k}}ds$, atque $1 - z = e^{\frac{-s}{2k}}$. Quibus ſubſtitutis habebitur $dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k}(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$.

Quae eſt aequatio pro curua tautochrona ſupra inuenta, ſuper cuius parte MA omnes deſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus; ſuper parte autem altera AN omnes aſcenſus iisdem temporibus.

Exemplum 2.

787. Sit $P = \frac{6az - 2az^5}{(1-zz)^2}$; erit $x = \int \frac{6azdz - 2az^5dz}{(1-z)^3}$ $= \frac{3az^2 + az^5}{1-z}$. Cum autem sit $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $1 - z$ $= e^{\frac{-s}{2k}}$; erit $x = \frac{a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4 - e^{\frac{-s}{2k}})}{e^{\frac{-s}{2k}}} = a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ $(4e^{\frac{s}{2k}} + 1) = a(4e^{\frac{s}{2k}} - (3 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2}$ $+ \frac{s^5}{96k^3} - \frac{s^6}{640k^4} +$ etc. $= bx$ mutata constante a in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3.

788. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis et medio vniformi in duplicata celeritatum ratione resistente, si detur curua quaecunque* MA, *super qua corpus descensus absoluat, inuenire curuam* AN *ei iungendam ad ascensus idoneam, ita vt omnes semioscillationes, quae super curua* MAN *fiunt, aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis vt hactenus potentia sollicitante, g, et exponente resistentiae k; sit curuae datae MA abscissa $AP = x$; arcus $AM = s$; curuae vero quaesitae abscissa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Incipiat nunc descensus in quocunque curuae MA puncto, sitque

que celeritas in A acquisita debita altitudini b, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$, et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita $a = e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et AN percurruntur $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}} dx)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{2k}} dt)}}$, quae expressio integrum dabit semioscillationis tempus, si post integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = b$. Cum igitur hoc tempus debeat semper habere valorem constantem, qui non a quantitate litterae b pendeat, ex hac conditione determinari debebit aequatio inter t et r ope datae aequationis inter x et s. Ponamus breuitatis gratia $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = X$ et $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = T$, atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = ds$ et $\frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR$. Quibus substitutis habere debebit $\int \frac{dS}{\sqrt{(b - X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b - T)}}$ valorem constantem si post integrationem ponatur $X = b$, et $T = b$. Fiat ergo generaliter $T = X$, quia T ab X non pendet, habebimus pro tempore hanc expressionem: $\int \frac{dS + dR}{\sqrt{(b - X)}}$, quae ita debet esse comparata, vt post integrationem facto $X = b$ littera b prorsus ex

calculo euanefcat. Hoc autem fiet, fi fuerit $dS + dR = \frac{a\,dX}{\sqrt{X}}$, erit enim tempus femiofcillationis $= \int \frac{a\,dX}{\sqrt{(bX - XX)}} = \pi a$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit $a = \frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, denotabit f longitudinem penduli in vacuo et grauitate $= g$ femiofcillationes minimas eodem tempore abfoluentis, quo hae femiofcillationes fuper curuis MA et AN peraguntur (167). Cum igitur fit $dS + dR = \frac{dX\sqrt{2f}}{\sqrt{X}}$ erit $S + R = 2\sqrt{2fX} = 2\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$. Eft vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$, vnde erit $k e^{\frac{r}{2k}} - k e^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$, feu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$, ideoque fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})$. Huic vero valori ipfius r refpondens valor ipfius t ex hac aequatione determinabitur $T = X$ feu $e^{\frac{r}{k}}dt = e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex quo inuenitur $t = \int \frac{dx}{(1 + \frac{1}{k}e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})^2}$ ex quibus conftructio curuae innotefcit. Aequatio autem pro curua quaefita AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, fi loco s fubftituatur $-2k(l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})$ et loco x hic valor $\int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})^2}$. His enim fubftitutis orietur haec aequatio inter r et t, quae eft pro curua quaefita AN. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

789. Cum oſcillationes minimae congruant cum oſcillationibus in vacuo, ſi curuae MA tangens in A non fuerit horizontalis, vel ſi radius oſculi in A fuerit infinite paruus, curuae quaeſitae AN radius oſculi in A erit $4f$. Erit enim hoc caſu tempus deſcenſus minimi $= o$ et tempus aſcenſus $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 2.

790. Sin autem curuae MA in A radius oſculi fuerit finitae magnitudinis ſcilicet b, erit tempus deſcenſus minimi $= \frac{\pi\sqrt{2b}}{2\sqrt{g}}$ (166). Quo igitur tempus ſemioſcillationis fit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$ erit radius oſculi curuae AN in A $= (2\sqrt{f} - \sqrt{b})^2$; debet autem eſſe $b < 4f$, ſeu $f > \frac{1}{4}b$, ne curua AN fiat imaginaria.

Corollarium 3.

791. Curuae ergo MA et AN in A et tangentem horizontalem, et radium oſculi communem habebunt, ſi fuerit $f = b$. Hoc enim caſu curuae AN radius oſculi in A fiet quoque $= b$.

Scholion 1.

792. Quemadmodum hic ex data curua deſcenſuum curua aſcenſuum determinauimus, ita perſpicitur ſimili modo ex curua aſcenſuum data curuam deſcenſuum inueniri poſſe; ſi enim detur aequatio

tio inter t et r; quia est $s = -2kl(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})$ atque $x = \int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})^2}$, his valoribus substituendis aequatio pro curua descensuum inter s et x obtinebitur.

Corollarium 4.

793. Cum f innumerabiles habere possit valores, modo sit $f > \frac{1}{4}b$; ad quamuis curuam siue descensuum siue ascensuum datam innumerae adiungi possunt curuae, eiusmodi, vt semioscillationes super iis factae sint omnes isochronae, omnino vti in vacuo fieri potest.

Corollarium 5.

794. Quia in solutione posuimus $T = X$ hac aequatione relatio continetur, inter quemque arcum descensus integrum et arcum respondentis ascensus. Ita si arcus descensus fuerit s erit arcus ascensus $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})$.

Exemplum 1.

795. Sit linea descensuum data recta verticalis PA pro qua est $s = x$. Erit ergo quoque $ds = dx$, atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = k(1 - e^{\frac{-s}{k}})$. Vnde igitur fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})$ seu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})}$

Porro

Porro autem eſt $t = \int \frac{ds}{(1 + e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})^2}$, ſeu $e^{\frac{r+k}{k}} dt = ds$. Eliminato ergo s prodibit pro curua aſcenſuum iſta aequatio: $(2f+k)^2 dt = k(2f-k)dr - \frac{2kf(2f+k)dr + 4fk^2 e^{\frac{r}{k}} dr}{e^{\frac{r}{2k}} \sqrt{(4ff + 2fk - 2fke^{\frac{r}{k}})}}$; in qua variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, quare ea ad curuam conſtruendam ſufficit. Integratio vero huius aequationis a quadratura circuli pendet. Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ iſta aequatio $dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}}$ ſeu $t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)}$, quae aequatio ad eam quam in cap. praec. inuenimus reduci poteſt.

Exemplum 2.

796. Sit linea deſcenſuum data ipſa tautochrona deſcenſuum ſupra inuenta, cuius aequatio eſt $adx = kds(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a} \int ds (e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{2k^2}{a}(\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{k^2}{a}(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ et $\sqrt{\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = \frac{k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{\sqrt{a}}$. Quamobrem fiet $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{\sqrt{2f} - e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f} + e^{\frac{-s}{2k}}(\sqrt{a} - \sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} =$

$e^{\frac{r}{2k}}$

$\frac{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f}}{\sqrt{a}-\sqrt{2f}}$ et $ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr\sqrt{a}}{\sqrt{2f}-e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}}$ atque $adx =$

$\frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f})^2}$. Cum autem porro sit $e^{\frac{-s}{k}}dx$

$= e^{\frac{r}{k}}dt$, erit $ae^{\frac{r}{k}}dt = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ siue $adt =$

$\frac{akdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ seu $(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2 dt = kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$
vbi $\sqrt{2f}$ maius esse debet quam $\sqrt{a}$. Haec autem aequatio inuenta comprehendit omnes tautochronas ascensuum; quae enim harumcunque cum tautochrona descensuum iungatur, super curua ex iis composita omnes semioscillationes debent esse isochronae. Si sumatur $f = 2a$, aequatio erit haec $adt = kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$, quae est pro tautochrona ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quo descensus super tautochrona descensuum data, atque ea est continuatio tautochronae descensuum.

Exemplum 3.

797. Sit linea descensuum data MA tautochrona ascensuum, et quaeratur quales curuae cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio vero pro hac curua MA est $adx = kds$ $(1-e$

$(1-e^{\frac{-s}{2k}})$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{k}{a}\int ds(e^{\frac{-s}{k}} - e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{a}(\frac{1}{3} - e^{\frac{-s}{k}} + \frac{2}{3}e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1 - 3e^{\frac{-s}{k}} + 2e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1+2e^{\frac{-s}{2k}})(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Ex his oritur $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + (1-e^{\frac{-s}{2k}})\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1+2e^{\frac{-s}{2k}})$ atque $t = \frac{k}{a}\int \frac{ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{(1+(e^{\frac{s}{2k}}-1)\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1+2e^{\frac{-s}{2k}}))^2}$, ex quibus constructio curuae consequitur.

Scholion 2.

798. Hoc exemplum ideo attulimus, vt appareat, cum quanam curua tautochronam ascensuum coniunctam esse oporteat, quo semioscillationes omnes aequalibus temporibus absoluantur. Ex formulis autem inuentis apparet curuam quaesitam non esse tautochronam descensuum; aequatio enim $cdt = kdr(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$ in illis formulis non continetur, quod periculum facienti statim patebit. Quamobrem si MA fuerit tautochrona descensuum et AN ascensuum, etiamsi omnes itus per MAN iisdem absoluantur temporibus, tamen reditus seu semioscillationes sequentes per NAM non erunt isochronae. Pendulum ergo, quod secundum curuas MA et AN oscillari efficitur, oscillationes non faciet isochronas etiamsi alternae semioscillationes, in quibus descensus in curua MA incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec

consequenter curua composita MAN non est idonea ad pendulorum motum in medio resistente aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium afferretur, si casus determinaretur, quo curua AN similis et aequalis curuae MA prodiret.

PROPOSITIO 88.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3.

799. *Si curuae* MA *et* AN *eam habuerint proprietatem, vt omnes semioscillationes, quae in curua* MA *incipiunt, sint inter se isochronae in medio quod in duplicata ratione celeritatum resistit; determinare casus, quibus hae duae curuae coniunctae* MA *et* AN *vnam curuam continuam constituunt.*

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quas in praecedente Prop. adhibuimus; scilicet $AP = x$; $AM = s$; $AQ = t$; et $AN = s$, atque $f =$ longitudini penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$: inuenimus ibi has duas aequationes $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ et $e^{\frac{r}{k}} dt = e^{\frac{-s}{k}} dx$, quibus relatio inter vtramque curuam continetur. Iam quia curuae MA et NA duo debent esse rami curuae continuae, aequatio inter x et s ita debet esse comparata, vt si x abeat in t, tum s fiat $= -r$ propter situm negatiuum. Ad hoc accipiamus nouam variabilem z, cuius s et x sint tales functiones, vt facto

facto z negatiuo x abeat in t et s in $-r$. Sit $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = z^2$; erit $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = zV2f$; facto enim z negatiuo, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit $ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -zV2f$; quae aequatio cum priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z, quae non mutatur etiam si loco z ponatur $-z$; et ponatur $ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}zV2f + P$; quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negatiuum; abibit $-s$ in r; atque habebitur $ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}zV2f + P$; ac $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = zV2f$; vti requiritur. Alteri aequationi $\int e^{\frac{r}{k}}dt = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$ per hanc $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = z^2$ iam satisfit; posito enim z negatiuo et dt loco dx atque r loco $-s$ prodit $\int e^{\frac{r}{k}}dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex variabili ergo z, cuius P est functio quaecunque par; curua quaesita AM, cuius continua est altera AN ita determinatur, vt sit $e^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{zV2f}{2k} + \frac{P}{k}$, atque $dx = 2e^{\frac{s}{k}}zdz = \frac{8k^2z^2dz}{(2P-zV2f)^2}$. Erit ergo $x = 8k^2\int\frac{zdz}{(2P-zV2f)^2}$ et $s = 2kl\frac{2k}{2P-zV2f}$. Sit $z = \frac{uV2}{Vf}$ tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem commodius producendam, quia debebit esse u vnius dimensionis, erit ergo P functio par ipsius u vnius dimensionis quoque. Quare habebitur $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

800. Infinitae ergo curuae tautochronae MAN inuenientur; si infiniti varii valores loco P, qui omnes sint functiones pares ipsius u substituantur. Aequatio vero inter x et s obtinebitur, si ex duabus aequationibus inuentis $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$, variabilis u quae etiam in P inest, eliminetur.

Corollarium 2.

801. Quia est $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ erit $ds = \frac{2k(du-dP)}{P-u}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{k}{P-u}$ seu $P-u = ke^{\frac{-s}{2k}}$. Atque $e^{\frac{s}{2k}}ds = \frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}$. Cum qua aequatione si altera $dx = \frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$ coniungatur, prodibit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(du-dP)}{2udu}$. Quae aequatio ad eliminandum u est saepe commodissima.

Scholion 1.

802. Quia euanescente s quoque x euanescere debet; primum inuestigandum est, quo ipsi u dato valore s euanescat. Deinde integrale $\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ ita accipi debet, vt euanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque obseruandum est, cum in constructione curuae, quae ope duarum inuentarum aequationum perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s; si quidem ea

ex

ex aequatione integrata $x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{udu}{(P-u)^2}$ deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multipla adhibeantur, loco duarum inuentarum aequationum adhiberi possunt istae $s = 2kl\frac{c}{P-u}$ et $x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{udu}{(P-u)^2}$ vbi constans c est arbitraria, et idcirco ita determinari potest, vt s eodem casu euanescat, quo euanescit x. At s euanescit si $u = o$; quia est $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{2u^2}{f}$; atque $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ euanescit euanescente s; quare c aequale esse debet valori ipsius P si in eo ponatur $u = o$. Eodem ergo casu x debet euanescere, ex quo constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel etiam loco P talis functio par ipsius u accipi debet, quae fiat $= c$ si ponatur $u = o$.

Corollarium 3.

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$ sit $= f$; atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent ab oscillationibus in vacuo: erit radius osculi curuae in A $= f$; si quidem tangens curuae in A fuerit horizontalis.

Exemplum 1.

804. Quia P esse debet functio par ipsius u, sit P constans $= c = k$; quo posito $u = o$ fiat $s = o$. Erit ergo $k - u = ke^{\frac{-s}{2k}}$ seu $u = k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ob $dP = o$, habebitur $\frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{dx} = \frac{f}{2u}$ seu $u = \frac{\int e^{\frac{-s}{2k}} dx}{2ds}$.

Ex quibus aequationibus conficitur ista $\frac{fdx}{2} = kds(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Quae aequatio est pro ipsa tautochrona descensuum; quae vltra A continuata dat tautochronam ascensuum; atque omnes semioscillationes super hac curua continua, si modo in ramo MA incipiant, erunt isochronae.

Exemplum 2.

805. Sit $P = k + \frac{u^2}{a}$; retinebit P eundem valorem facto u negatiuo. Hoc posito erit $k - u + \frac{u^2}{a} = ke^{\frac{-s}{2k}}$; et propter $dP = \frac{2udu}{a}$ erit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(a-2u)}{2au}$; ex qua aequatione prodit $u = \frac{fadx}{2(ae^{\frac{s}{2k}}ds + fdx)}$. Qui ipsius u valor in altera aequatione substitutus dat $2fa^2e^{\frac{s}{k}}dxds = 4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)(ae^{\frac{s}{2k}}ds + fdx)^2 - f^2ae^{\frac{s}{2k}}dx^2$; atque extracta radice

$$\frac{ae^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1 \pm \sqrt{\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)}\left(\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1\right)}$$

In casu speciali si fuerit $a = 4k$ ista aequatio abit in hanc $\frac{4ke^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{1 + e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1}$, quae duas aequationes in se complectitur, quarum altera est $fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} - 1)$, et altera $-fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} + 1)$

$+1)$. Harum autem posterior, quia posito $s=0$, non euanescit dx, et ob valorem ipsius dx negatiuum, est inutilis. Prior vero integrata dat $fx=16k^2$ $\left(\frac{e^{\frac{3s}{4k}}}{3}-\frac{e^{\frac{s}{2k}}}{2}+\frac{1}{6}\right)$ seu $3fx=8k^2(2e^{\frac{3s}{4k}}-3e^{\frac{s}{2k}}+1)$ Quae vltra A continuata hac aequatione exprimitur $3ft=8k^2(2e^{\frac{-3r}{4k}}-3e^{\frac{-r}{2k}}+1)$. Per seriem vero habetur ista aequatio: $fx=\frac{s^2}{2}+\frac{5s^3}{24k}+\frac{19s^4}{384k^2}$ $+$ etc. et pro altera curuae parte AN haec: ft $=\frac{r^2}{2}-\frac{5r^3}{24k}+\frac{19r^4}{384k^2}-$ etc.

Corollarium 4.

806. Quia est $z^2=\frac{2u^2}{f}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, erit $u=\sqrt{\frac{1}{2}}$ $f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Eliminato vero u est $P=ke^{\frac{-s}{2k}}+\sqrt{\frac{1}{2}}f$ $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Quare si ille valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit statim aequatio inter s et x.

Exemplum 3.

807. Ponamus esse $P=\sqrt{(k^2+u^2)}$, seu $P^2=$ k^2+u; substitutis loco P et u^2 valoribus supra datis, $k^2e^{\frac{-s}{k}}+ke^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}=k^2$, seu $\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$ $=k(e^{\frac{s}{2k}}-e^{\frac{-s}{2k}})$. Hinc quadratis sumendis oritur $2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx=k^2(e^{\frac{s}{2k}}-e^{\frac{-s}{2k}})^2=k^2(e^{\frac{s}{k}}+e^{\frac{-s}{k}}-2)$. Haec vero aequatio differentiata dat hanc $2fe^{\frac{-s}{k}}dx=kds$ (e

$(e^{\frac{s}{k}} - e^{\frac{-s}{k}})$ seu $2fdx = kds(e^{\frac{2s}{k}} - 1)$, cuius integralis est $2fx = \frac{k^2 e^{\frac{2s}{k}}}{2} - ks - \frac{k^2}{2}$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3k} + \frac{s^4}{6k^2} + \frac{s^5}{15k^3} + \frac{s^6}{45k^4} +$ etc.

Scholion 2.

808. Quas in his exemplis inuenimus curuas tautochronas pro medio quod resistit in duplicata ratione celeritatum, eae ita sunt comparatae, vt arcus MA et AN sint dissimiles. Cum igitur omnes descensus super curua MA incipere debeant, sequentes semioscillationes, quae in curua NA incipiunt, non erunt tautochronae, id quod in causa est, quod hae curuae ad motum oscillatorium accommodari nequeant. Huic autem incommodo remedium afferretur, si huiusmodi curuarum MA et NA par inueniretur, quae essent inter se similes et aequales, hoc enim casu perinde super vtraque curua descensus fieri posset. Dubium quoque nullum est, quin talis casus existat; eiusque inuentio, quia hae duae curuae forte non erunt continuae, ad praecedentem propositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curua descensuum, cui respondens curua ascensuum similis et aequalis sit; haec vero inuestigatio ob defectum analyseos ita est difficilis, vt dubitem, num quisquam ante insignem analyseos promotionem, ad hunc scopum pertingere possit. Haec vero quae-

stio

ſtio huc reducitur, vt inueſtigetur aequatio inter s et x huius conditionis, vt ſi in ea ponatur $-2kl(e^{\frac{-s}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2\int\int e^{\frac{s}{k}}dx})$ loco s; et $\int \frac{dx}{(1-\frac{1}{k}e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2\int\int e^{\frac{s}{k}}dx})^2}$ loco x, eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante. Conditio quidem haec multis modis facilior effici poteſt; attamen quomodo ei ſatisfieri poſſit non video. Si medium fuerit rariſſimum, non difficile eſt ex allatis caſum inuenire, quo duae curuae MA et AN ſint inter ſe ſimiles et aequales. Ego quidem ad finem perducto calculo hanc inneni aequationem $fdx = sds + \frac{s^3ds}{9k^2}$, ſeu $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{36k^2}$; quae curua ſimul vltra A continuata ramum habet AO ſimilem et aequalem arcui AM; quare pendulum in hac curua oſcillans ſingulas ſemioſcillationes abſoluet aequalibus temporibus. Erit autem $s^2 = -9k^2 + 3k\sqrt{(9k^2 + 4fx)}$ et $s = \sqrt{(-9k^2 + 3k\sqrt{(9k^2 + 4fx)})}$. Quia vero k eſt quantitas valde magna, erit $s = \sqrt{2fx} - \frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2}$, atque $ds = \frac{fdx}{\sqrt{2fx}} - \frac{fdx\sqrt{2fx}}{12k^2}$. Hincque fit $dy = dx\sqrt{\frac{f-2x}{2x}} - \frac{f^2dx}{12k^2}\sqrt{\frac{2x}{f-2x}}$. Ponatur $f = 2a$ erit $y = \int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}} - \int\frac{adx}{3k^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \int\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax-xx)}} - \int\frac{a^2xdx}{3k^2\sqrt{(ax-xx)}}$

$$= (1 + \frac{a^2}{3k^2})\sqrt{(ax-xx)} + (1 - \frac{a^2}{3k^2})\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}.$$

Quae ergo curua eodem fere modo, quo cyclois deſcribi poteſt ope rectificationis circuli.

Corollarium 5.

809. Si sumatur $a = k\sqrt{3}$ seu $f = 2k\sqrt{3}$; curua haec abit in ellipsin, cuius axis horizontalis est duplo maior quam verticalis, qui est $= k\sqrt{3}$. Fieri ergo potest, vt ellipsis sit tautochrona in fluido rarissimo; atque magis satisfaciat quam cyclois.

Scholion 3.

Tab. XVI. Fig. 4.

810. Constructio autem curuae tautochronae in medio rarissimo in praec. scholio datae est vt sequitur. Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ describatur semicirculus AOB, et ex hoc super basi BD cyclois AFD; quae eadem inuerso situ describatur AGD. Quibus factis curua quaesita AMC construetur sumendis vbique eius applicatis $PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG$; qua ratione curuae infinita puncta cognoscuntur. Vel etiam accipi potest $PM = (1 + \frac{a^2}{3k^2})PO + (1 - \frac{a^2}{3k^2})AO$, ita vt cycloide non sit opus. Curua autem haec alicubi habebit tangentem verticalem, seu applicatam PM maximam quae inuenitur posito $dy = o$. Prodibit autem $\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2}$ seu $x = \frac{3ak^2}{a^2 + 3k^2}$ cui valori si AP aequalis capiatur, inuenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 5.

811. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis* g, *data curua quacunque* am *pro descensibus*

bus in vacuo; inuenire curuam AM *pro descensibus in medio resistente uniformi in duplicata ratione celeritatum huius indolis, et omnes descensus super* MA *sint isochroni respectiue omnibus descensibus super* ma; *si celeritates in punctis imis* a *et* A *fuerint aequales.*

Solutio.

Sit pro curua descensuum in vacuo am abscissa $ap = t$; arcus $am = r$; pro curua vero descensuum in medio resistente sit $AP = x$ et $AM = s$; resistentiae vero exponens ponatur $= k$. Iam considerentur bini descensus super his curuis, in quibus celeritates in A et a acquisitae sint aequales et debitae altitudini b. Erit ergo tempus descensus in vacuo $= \int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$, si post integrationem ponatur $gt = b$. At pro tempore descensus in medio resistente super curua MA habebitur $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}} dx)}}$ si item post integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$. Quamobrem haec tempora erunt aequalia si fuerit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$; his enim positis pro vtroque tempore habebitur eadem expressio $\int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$. Cum igitur sit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$, erit integrando $2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) = r$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{2k-r}{2k}$

$\frac{2k-r}{2k}$; vnde prodit $s = 2kl\frac{2k}{2k-r}$. Altera vero aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = t$ dat $e^{\frac{-s}{k}}dx = dt$. Est autem $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2}$ quo valore substituto habetur $dx = \frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$ ex quo oritur $x = \int\frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$. Data ergo aequatione inter t et r pro curua am ope duarum harum aequationum, quibus s et x per t et r determinantur, construi poterit curua quaesita AM. Aequatio vero inter x et s commodius inuenietur ex data aequatione inter t et r; si in ea loco r substituatur $2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ loco t. Q. E. I.

Corollarium 1.

812. Circa punctum infimum A vbi t et r sunt quantitates euanescentes fit $s = r + \frac{r^2}{4k}$; et $x = t + \int\frac{rdt}{k}$, seu $dx = dt + \frac{rds}{k}$ et $ds = dr + \frac{rdr}{2k}$. Quare inclinatio curuae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curuae ma in A.

Corollarium 2.

813. Porro radius osculi in puncto infimo a si tangens fuerit horizontalis est $= \frac{rdr}{dt}$; et in A quia tangens quoque erit horizontalis $= \frac{sds}{dx} = \frac{rdr + \frac{3r^2dr}{4k}}{dt + \frac{rdt}{k}}$. Erit ergo $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt}(1 - \frac{r}{4k})$ Quare ob r infinite paruum erit $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}$.

Corollarium 3.

814. Si ergo curua ma in a habuerit tangentem horizontalem; erit curuae MA tangens in

A

A quoque horizontalis; atque radius osculi in A aequalis erit radio osculi in a.

Corollarium 4.

815. Si igitur in vacuo inuenta fuerit curua ma; in qua tempora descensuum quamcunque habeant relationem ad celeritates in a acquisitas; idem problema pro medio resistente soluetur curua MA, quae praescripta ratione ex curua ma construitur.

Corollarium 5.

816. Si igitur curua ma fuerit cyclois seu tautochrona in vacuo; AM erit tautochrona descensuum in medio resistente supra inuenta. Posito enim $r^2 = 2at$ seu $rdr = adt$; prodibit substitutis loco r et t inuentis valoribus ista aequatio $2ke^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}}) = ae^{\frac{-s}{k}}dx$ seu $adx = 2kds$ $(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.

Exemplum.

817. Sit am linea recta vtcunque inclinata, ita vt sit $r = nt$; erit tempus descensus, quo celeritas altitudini b debita generatur $= \int \frac{ndt}{\sqrt{(b-gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}$. Eandem ergo habebit proprietatem curua MA, vt tempus cuiusque descensus in medio resistente quo celeritas $\sqrt{b}$ generatur, sit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ seu proportionale ipsi celeritati genitae. Cum autem sit $r = nt$; erit $dr = ndt$; in qua si loco dr et dt valores inuenti substituantur prodibit $e^{\frac{-s}{2k}}ds = ne^{\frac{-s}{k}}$

dx

dx seu $ndx = e^{\frac{s}{2k}} ds$; quae est aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraesentatur in fig. 2. Tab. XVI. nempe curua CA, quae in A eam habet inclinationem quam recta data ma.

Scholion. I.

818. Quemadmodum hic curua MA est determinata, super qua omnes descensus in medio resistente iisdem absoluuntur temporibus, quibus descensus in vacuo super curua ma, si celeritates vltimae in A et a fuerit aequales; ita eodem modo curua MA potest definiri, super qua omnes ascensus in medio resistente iisdem temporibus absoluuntur, quibus similes iisdem celeritatibus incipientes ascensus in vacuo super curua am. Nam cum in medio resistente descensus in ascensum mutetur facto k negatiuo; si ponantur AP $= x$ et AM $= s$ habebitur $x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k+r)^2}$ et $s = 2k \, l \frac{2k+r}{2k}$ seu inuerse $t = \int e^{\frac{s}{k}} dx$ et $r = 2k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Ex quibus tum facile curua AM potest construi et aequatio pro ea inueniri.

Scholion 2.

819. In hoc problemate ex curua descensuum in vacuo data determinauimus curuam descensuum in medio resistente. Facile autem apparet vicissim ex data curua AM pro medio resistente alteram am pro vacuo inueniri posse. Cum enim sit $r = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $t = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ constructio curuae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio vero pro curua

am

am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s reperitur; ſi in ea loco x ſubſtituatur $\int\frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$ et $2kl\frac{2k}{2k-r}$ loco s. Quod hic praeterea de deſcenſibus dictum eſt, idem de aſcenſibus valet, ſi modo k ponatur negatiuum vti in Scholio I monuimus.

Scholion 3.

420. Tradita hic inuentio alterius curuae duarum *am* et AM ex altera etiam locum habet, ſi datae curuae non habeatur aequatio, ſed ſi manu vtcunque fuerit ducta; ex formulis enim inuentis conſtructio poteſt deduci, quae ab aequatione non amplius pendeat. Quamobrem cum in cap. praec. (432.) in caſum inciderimus pro vacuo quo curuam *cm* inuenimus cum data *ac* iungendam, vt omnes deſcenſus ex quouis puncto curuae *cm* vsque ad a aequalibus abſoluantur temporibus; ſimilia exempla ex iis pro medio reſiſtente erui poterunt, quibus linea ex partibus duarum diuerſarum curuarum compoſita ſit tautochrona. Si enim curua *acm* fuerit huiusmodi curua tautochrona pro vacuo, ex ea per ſolutionem huius problematis ſimilis curua compoſita pro medio reſiſtente inuenietur. Scilicet ex *ac* methodo tradita curua AC definiatur; qua inuenta poſita $bp = t$, $cm = r$; et $BP = x$, atque $CM = s$; et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et $AB = A$ et $AC = C$; tum enim cum data ſit aequatio inter t et r erit $AP = A + x = \int\frac{4k^2dt}{(2k-c-r)^2}$ et $AM = C + s = 2kl\frac{2k}{2k-c-r}$.

Tab. XVI. Fig. 6.

At

At ſi pro medio reſiſtente data fuerit curua AC; atqne requiratur altera CM eius proprietatis, vt omnes deſcenſus ſuper MCA aequalibus abſoluantur temporibus; ſolutio non diſſimili modo efficietur. Nam ex data curua AC pro medio reſiſtente, inueniatur curua eiusdem proprietatis pro vacuo *ac* per Scholion 2. Qua inuenta quaeratur curua *cm* ei adiungenda, quae omnes deſcenſus in vacuo iſochronos producat (432.). Denique methodo modo tradita ex curua compoſita *acm* pro vacuo quaeratur ſimilis curua compoſita pro medio reſiſtente ACM, cuius quidem pars AC iam eſt cognita, quippe ex ea lineam *ac* definiuimus. Idem ergo problema quod in vacuo tantum in ſe habebat difficultatis, in medio quoque reſiſtente reſoluitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem beneuolum rogo, vt antequam ad caput ſequens progrediatur, quae in Cap. I. ab §. 58. vsque ad finem cap. tradita ſunt, repetere velit.

CAPUT

CAPUT QUARTUM

DE

MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE.

PROPOSITIO 90.

Problema.

821.

D*ata via in superficie quacunque* M m μ; *inueni-re eius positionem respectu plani dati* APQ, *et radii osculi illius viae in* M *tam positionem quam longitudinem; nec non normalis in superficiem situm.*

Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum respectu positio curuae M$m\mu$ sit determinanda; ex tribus punctis proximis M, m et μ datae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, mq, $\mu\varrho$; atque ex punctis Q, q, ϱ ad axem AP perpendicula QP, qp et $\varrho\pi$. Posito nunc initio abscisfarum in A, sit AP$=x$; PQ$=y$ et QM$=z$. Quia porro superficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variabiles x, y et z; quae aequatio sit haec $dz = Pdx + Qdy$. Cum hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in ista superficie existens; quare cum linea M$m\mu$ data

ponatur dabitur praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curua $Mm\mu$ determinatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint elementa abscissae Pp, $p\pi = dx$ inter se aequalia, seu sumatur elementum dx constans. Erit ergo $pq = y + dy$; $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; atque $qm = z + dz$, et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$. His positis sit MN normalis in superficiem in puncto M, et N punctum quo haec normalis plano APQ occurrit, demittatur ex N in axem perpendiculum NH; erit $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$ (68). Sit nunc MR positio radii osculi curuae $Mm\mu$, et R incidentia eius in planum APQ; erit ex R in axem demisso perpendiculo RX; $AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$; atque $XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$ (68). Longitudo vero radii osculi scilicet $MO =$

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}} \quad (72).$$

Denique concipiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm, $m\mu$, productum, donec planum APQ interfecet sitque interfectio recta RKI, cui ex A erecta perpendicularis in K occurrat, et ex P in V; inuentum est supra esse $PV = \frac{zddy}{ddz} - y$ (68). Cum nunc sit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit $PI = \frac{(AX - AP)PV}{XR - PV}$. Est vero $AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$ atque $XR - PV = \frac{zddyddz(dz^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}$. Quibus substitutis erit $PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dz^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)}$

$=$

$= \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$ atque $AI = PI - AP = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzddy - dyddz}$. Hinc reperitur $AK = \frac{PV.AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$. Plani vero in quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ inuenietur, demittenda ex Q perpendiculari QS ad intersectionem RI; erit enim tangens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum sit IV : PI = QV : QS erit illa tangens $= \frac{QM.IV}{PI.QV} = \frac{\sqrt{(dx^2 ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$. Anguli vero NMR, quem radius osculi cum normali in superficiem constituit, tangens est $= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ (71). Ex his igitur omnia deduci possunt, quae ad positionem curuae $Mm\mu$ cognoscendam requiruntur. Q.E.I.

Corollarium I.

822. Curuae $Mm\mu$ proiectio in plano APQ est curua $Qq\varrho$, cuius natura exprimitur aequatione inter x et y. Quare ista proiectio habebitur, si ope aequationum $dz = Pdx + Qdy$, et eius, qua ipsa curua in superficie ducta determinatur, noua formetur aequatio eliminanda variabili z, quae sit inter x et y tantum.

Corollarium 2.

823. Simili modo, si eliminetur x, vt prodeat aequatio inter y et z; hac aequatione definietur proiectio curuae $Mm\mu$ in plano quod est normale ad axem AX. Atque aequatio in qua non inest y,

fed tantum x et z dabit proiectionem curuae $Mm\mu$ in plano, quod normaliter planum APQ fecundum ax m AX interfecat.

Corollarium 3.

824. Curuae autem $Mm\mu$ natura ex duabus eius proiectionibus in duobus planis inuicem normalibus diftincte cognoscitur. Qualem cognitionem quoque fuppeditat vnica proiectio vna cum ipfa fuperficie.

Corollarium 4.

825. Quamobrem ad curuam in fuperficie data quamcunque characteribus defignandam requiritur, vt praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$, qua fuperficies determinatur, detur aequatio duas tantum variabiles inuoluens pro proiectione quapiam curuae $Mm\mu$.

Corollarium 5.

826. Si fuperficies fecetur plano, fimili modo, quo conus ad fectiones conicas producendas fecari folet, curua ex hac fectione orta erit in eodem plano. Quare his cafibus tam pofitio rectae IR erit conftans, quam plani IMR inclinatio ad planum APQ.

Exemplum.

827. Si igitur detur fuperficies quaecunque eaque fecetur plano IMR; quaeratur curua hac fectio-

tione orta. Ad hoc ponatur AI $= a$; AK $= b$; et anguli inclinationis plani IMR ad planum APQ tangens $= m$; eritque $a = \frac{zdxddy - ydxddz}{azddy - dyddz} - x$ et $b = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$, atque $m = \frac{\sqrt{(dx^2 ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$. Ex quibus aequationibus coniunctis cum $dz = Pdx - Qdy$ natura curua hac sectione genitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus oritur $\frac{b}{a} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$ seu $ddz : ddy = adz : bdx + ady$; cuius aequationis integralis est $\frac{1}{a} l dz = \frac{1}{a} l(bdx + ady) - \frac{1}{a} lc$, seu $cdz = bdx + ady$, et porro $cz = bx + ay + ff$. In prima vero aequatione si loco ddz et ddy eorum proportionalia substituantur, prodibit $a + x = \frac{bzdx + azdy - aydz}{bdz}$ seu $abdz + bxdz = bzdx + azdy - aydz$, cuius per zz diuisae integralis est haec $c - \frac{ab}{z} = \frac{bx + ay}{z}$ seu $cz = bx + ay + ab$ quod ergo ante erat ff hic est ab seu $ff = ab$. Constantem vero c tertia aequatio definiet; erit autem $m = \frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{bdx + ady}$ seu $\frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = ady + bdx$. Quare erit superior littera $c = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m}$, atque praeter aequationem superficiei naturam exprimentem habetur ista $\frac{z\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = bx + ay + ab$, ex quibus natura quaesitae curuae est deriuanda. Quia autem tota curua quaesita est in plano IMR, commodissime ea exprimetur aequatione inter coordinatas orthogonales in eodem plano sumtas. Sumto ergo IR pro axe, ex M in eum demittatur perpendiculum MS et vocetur IS $= t$ et MS $= u$. Est vero IA : AK $=$ IP : PV seu PV $= \frac{ab + bx}{a}$ et QV $= \frac{ab + bx + ay}{a} = \frac{z\sqrt{(a^2 + b^2)}}{ma}$. Porro est

$\sqrt{(a^2}$

$\surd(a^2+b^2) : a = \frac{z\surd(a^2+b^2)}{ma} : QS$; quare erit $QS = \frac{z}{m}$ et $SV = \frac{bz}{ma}$. Ex his prodibit $MS = u = \frac{z\surd(1+m^2)}{m}$ atque $IS = t = \frac{m(a+x)\surd(a^2+b^2) - bz}{ma}$. Ex quo oritur $z = \frac{mu}{\surd(1+m^2)}$ et $x = \frac{bu + at\surd(1+m^2)}{\surd(a^2+b^2)(1+m^2)} - a$ et ſubſtitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\surd(a^2+b^2)}{m} = bx + ay + ab$ prodibit $y = \frac{au - bt\surd(1+m^2)}{\surd(1+m^2)(a^2+b^2)}$. His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione ſuperficiei ſubſtitutis proueniet aequatio inter t et u ſeu coordinatas orthogonales curuae quaeſitae.

Corollarium 6.

828. Si interſectio plani ſecantis IR in ipſum axem AX incidat ſumaturque I in A; erit $z = \frac{mu}{\surd(1+m^2)}$; $y = \frac{u}{\surd(1+m^2)}$ et $x = t$.

Corollarium 7.

829. Si interſectio IR plani ſecantis SMR cum plano APQ fuerit normalis ad axem AX erit $b = \infty$. Quare prodibunt $z = \frac{mu}{\surd(1+m^2)}$; $x = \frac{u}{\surd(1+m^2)} - a$ et $y = -t$.

Corollarium 8.

830. Cum valores loco z, y et x ſubſtituendi ſint vnius dimenſionis ipſarum t et u, perſpicuum eſt aequationem inter t et u non plures habere poſſe dimenſiones, quam ipſam aequationem inter z, y et x.

Co-

Corollarium 9.

831. Quare si aequatio inter z, y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi praeter conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano factae erunt sectiones conicae.

Scholion.

832. In Comment. Tom. III. ea dissertatione, in qua lineam breuissimam in superficie quacunque determinaui, tria praecipue superficierum genera sum persecutus, quae erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda. Aequatio vero generalis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas si P euanescit et Q tantum ab y et z pendeat, ita vt aequationem pro hoc superficierum genere abscissa x non ingrediatur; omnes enim sectiones inter se parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio $dz = Qdy$. Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies quae genenrantur ducendis rectis ex singulis curuae cuiuspiam punctis ad punctum fixum extra planum eius curuae situm. Quae superficies hanc habent proprietatem, vt omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latera homologa, vt distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficiebus, si quidam vertex poli fuerit in A, ita sunt comparatae, vt x, y et z coniunctim vbique eundem dimensionum numerum constituant. Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae gene-

generantur conuersione cuiuscunque curuae circa axem, qui axis si fuerit AX, posito x constante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare aequatio pro iis hanc habebit formam $dz = Pdx - \frac{ydy}{z}$, seu $zdz + ydy = zPdx$, vbi Pz ab x tantum pendet; seu est $Q = -\frac{y}{z}$ et $P = \frac{X}{z}$ existente X functione ipsius x. Quemadmodum autem in his superficiebus tornatis omnes sectiones axi normales sunt circuli, ita tales superficies concipi possunt, quarum sectiones axi normales sint curuae quaecunque similes. Tales superficies omnes hac continebuntur proprietate generali vt functio quaecunque ipsius x aequalis sit functioni eiusdem vbique dimensionum ipsarum y et z numeri. Vt si iste dimensionum numerus fuerit n; aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ pro ea haec erit proprietas vt sit $Rz + Qy = n\int Pdx$, vel $Rdx + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}$. Ex quo, an data aequatio sit ad huiusmodi superficiem, statim concludi potest.

PROPOSITIO 91.

Problema.

833. *In superficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea motum et a nullis potentiis sollicitatum describit tam in vacuo quam in medio quocunque resistente.*

So-

Solutio.

Quia corpus a nullis potentiis abſolutis ſollicitari ponitur, linea ab eo in ſuperficie deſcripta erit linea breuiſſima in vacuo (62.). Medii autem reſiſtentis vis celeritatem corporis tantum imminuit, neque directionem vllo modo afficit, quare etiam in medio reſiſtente via a corpore in quauis ſuperficie deſcripta erit pariter breuiſſima. Manentibus igitur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, ſit $dz = Pdx + Qdy$ aequatio ſuperficiei naturam exprimens, atque Mm, $m\mu$ duo lineae breuiſſimae cuiuspiam elementa. Ex his ſupra pro linea breuiſſima inuenta eſt haec aequatio $Pdz\,ddy + dx\,ddy = Pdy\,ddz - Qdx\,ddz$ (69.), vnde oritur $ddz = \frac{(Pdz + dx)ddy}{Pdy - Qdx}$. At aequatio ad ſuperficiem differentiata dat $ddz = dPdx + Qddy + dQdy$, ex quibus coniunctis ſit $ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ et $ddz = \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$. Dato ergo elemento Mm, ſequens $m\mu$ in linea breuiſſima inuenietur; erit enim $\pi\varrho = PQ + 2dy + ddy$ et $\varrho\mu = QM + 2dz + ddz$, et ipſarum ddy et ddz valores ſunt inuenti. Quare hinc ſequentis cuiusque elementi poſitio determinatur, atque ipſius lineae breuiſſimae natura per quamcunque eius proiectionem cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

834. Si in aequatione pro ſuperficie P et Q tantum per x et y dantur, aequatio $ddy =$

$\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ proiectionem lineae breuiſſimae in plano APQ denotat.

Corollarium 2.

635. Pro linea ergo breuiſſima $Mm\mu$ ſumtis elementis axis aequalibus erit $\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ atque $\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(Pdz+dx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$, ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et m cognoſcitur.

Corollarium 3.

836. Quia pro linea breuiſſima angulus RMN euaneſcit (71.), incidet R in N, poſitio ergo radii oſculi ita ſe habebit, vt ſit $AX = x + Pz$ et $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii oſculi erit $= -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$.

Corollarium 4.

837. Planum vero IMR in quo ſita ſunt elementa lineae breuiſſimae $Mm\mu$ ita determinabitur, vt ſit $AL = -x + \frac{y(dx+Pdz)-z(Pdy-Qdx)}{Qdz+dy}$; et $AK = -y + \frac{z(Pdy-Qdx)+x(dy+Qdz)}{dx+Pdz}$. Tangens vero anguli quem planum IMR cum plano APQ conſtituit erit $= \frac{\sqrt{((dx+Pdz)^2+(dy+Qdz)^2)}}{Pdy-Qdx}$. Huiusque anguli ſecans eſt $= \frac{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}{Pdy-Qdx}$, ſeu coſinus $= \frac{Pdy-Qdx}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$.

Exem-

Exemplum 1.

838. Sit ſuperficies cylindrica quaecunque axem habens AP, exprimetur eius natura hac aequatione $dz = Qdy$ euaneſcente P in generali aequatione $dz = Pdx + Qdy$. Quare pro proiectione lineae breuiſſimae huius ſuperficiei in plano APQ habebitur ob $P = o$ et $dP = o$ haec aequatio $ddy = \frac{-QdQdy}{1+Q^2}$ ſeu $l\frac{\alpha dx}{dy} = lV(1+Q^2)$ et $\alpha dx = dy V(1+Q_2)$, ſi quidem Q tantum per y detur; at ſi Q per y et z detur variabilis z eſt eliminanda ope aequationis $dz = Qdy$. Vti in cylindro circulari in quo eſt $z^2 + y^2 = a^2$; erit $z = V(a^2 - y^2)$, et $Q = \frac{y}{V(a^2-y^2)}$ Quare erit $\alpha dx = \frac{ady}{V(a^2-y^2)}$. In genere autem $\int dy V(1+Q^2)$ exprimit arcum ſectionis ad axem AP normalis; quare dicto hoc arcu $= s$ erit $\alpha x = s$. Ex quo intelligitur, ſi talis ſuperficies in planum explicetur, fore lineam breuiſſimam rectam; vti conſtat.

Exemplum 2.

839. Sit ſuperficies propoſita conica quaecunque verticem habens in A; aequatio pro tali ſuperficie ita poterit adaptari, vt z aequetur functioni vnius dimenſionis ipſarum x et y. Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$, litterae P et Q erunt functiones nullius dimenſionis ipſarum x et y. Hanc ob rem, vti iam alibi oſtendi, erit $Px + Qy = o$, ſeu $Q = \frac{-Px}{y}$; vnde fiet $dQ = \frac{Pxdy - Pydx - yxdP}{y^2}$;

 et

et $Pdy - Qdx = \frac{P(ydy+xdx)}{y}$; atque $dPdx + dQdy = \frac{y^2 dPdx + Pxdy^2 - Pydxdy - yxdPdy}{y^2} = \frac{(ydx-xdy)(ydP-Pdy)}{y^2}$ et tandem $(1+P^2+Q^2) = \frac{y^2+P^2y^2+P^2x^2}{y^2}$. Quibus substitutis erit $ddy = \frac{P(ydy+xdx)(ydx-xdy)(ydP-Pdy)}{ydx(y^2+P^2y^2+P^2x^2)}$. Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia P est functio nullius dimensionis ipsarum x et y. Erit vero $dy = pdx + xdp$ et $ddy = xddp + 2dxdp = -\frac{P(p^2xdx+px^2dp+xdx)(pxdP-Ppdx-PxdP)x^2dp}{px^3dx(p^2+P^2p^2+P^2)} = \frac{Pdp(p^2dx+pxdp+dx)(Ppdx+PxdP-pxdP)}{pdx(p^2+P^2+P^2p^2)}$. Ex qua aequatione quidem proiectio difficulter cognoscitur. Quomodo autem linea breuissima in tali superficie sit determinanda fusius docui in Comment. III. p. 120. Ceterum idem de linea breuissima est notandum quod ante, scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

Scholion.

840. Simili modo in determinandis lineis breuissimis super aliis superficierum speciebus non hic immoror, quia in cit. loco hanc materiam plenius exposui. Progredior ergo ad inuestigationem linearum, quae in superficie a corpore a quibuscunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse est, vt in effectus cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4.

841. *Vim prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est normalis ad ipsam superficiem in qua corpus mouetur.* Co-

Corollarium.

842. Haec vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout eius directio directioni radii osculi lineae breuissimae vel contraria est vel in eam incidit (79.).

DEFINITIO 5.

843. *Vim deflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est in plano superficiem tangente et perpendicularis in viam a corpore descriptam.*

Corollarium.

844. Haec ergo vis corpus a linea breuissima, quam a nullis potentiis sollicitatum describeret, deflectit, et vel cis vel vltra eam detrahit pro eius directione vel cis vel vltra tendente.

PROPOSITIO 92.

Problema.

845. *Determinare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque motum, quod praeterea a nullis potentiis sollicitatur.*

Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Quia haec vis premens est normalis in superficiem, ideoque eius directio MN; ea neque

 cele-

celeritatem, neque directionem motus afficiet, sed tota in pressione superficiei consumetur, corpus igitur in eadem linea progredietur, in qua si haec vis abesset, moueretur; quae autem est linea breuissima in prop. praec. determinata. Mouebitur ergo corpus in linea $M m \mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem superficiei MN. Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea superficiem versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis premens $= M$; premetur ab ea superficies secundum MN vi $= M$. At si radius osculi MO in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi erit contraria eiusque effectum minuet. Cum autem $M m \mu$ sit linea breuissima, est radius osculi $MO = -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$, per quem si diuidatur dupla altitudo v celeritati in M debita, prodibit vis centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum MN premitur $= + \frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} + M$. Positio tandem huius vis prementis per superiora inuenta est $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$; demisso scilicet ex puncto N, in quo normalis MN plano APQ occurrit, ad axem perpendiculo NH. Q. E. I.

Corollarium I.

846. Cum neque altera vis normalis deflectens, neque vis tangentialis neque vis resistentiae, si quae adest, pressionem in superficiem afficiant; per-

perſpicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea ſollicitetur, preſſionem ſemper tantam eſſe quantam hic aſſignauimus.

Corollarium 2.

847. Quantumuis igitur via a corpore deſcripta a linea breuiſſima diſcrepet, tamen preſſio in ſuperficiem fit ſecundum normalem in ſuperficiem, ſeu ſecundum radium oſculi lineae breuiſſimae, non vero ſecundum ipſius curuae deſcriptae radium oſculi, cuius longitudo etiam ad preſſionem non requiritur.

Scholion.

848. Ob hanc cauſam eam radii oſculi lineae breuiſſimae formulam adhibuimus, in qua differentialia ſecundi gradus non inſunt, ne is pendeat a poſitione duorum elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipſa mouetur. Sed iſte radius oſculi ex vnico elemento Mm innoteſcere debet: Si enim corpus propter vim deflectentem non lineam breuiſſimam deſcribat, differentialia ſecundi gradus ddy et ddz non amplius in radium oſculi lineae breuiſſimae ingredi debent.

PROPOSITIO 93.

Problema.

849. *Vis tangentialis, quae ſecundum tangentem* MT *corpus trahit, effectum in corpus in ſuperficie quacunque motum determinare.* Tab. XVII. Fig. 2.

So-

Solutio.

Sit haec vis tangentialis $= T$, corpusque per elementum Mm progrediatur celeritate altitudini v debita; quia haec vis motum diminuit, erit $dv = -T. \; Mm = -T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, manentibus iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi. Praeterea vero haec vis neque pressionem neque deuiationem a linea breuissima afficit. Ad positionem vero directionis huius vis inueniendam, producatur tangens MT donec occurrat plano APQ in T; erit T punctum in elemento qQ producto. Fiat ergo $dz : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : QT$; eritque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}$. Ex T demittatur in axem perpendiculum TF; erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = QT : PF$; quare habetur $PF = \frac{zdx}{dz}$ et $AF = \frac{zdx - xdz}{dz}$. Porro ob $dx : dy = \frac{zdx}{dz} : y - FT$ erit $FT = y - \frac{zdy}{dz}$; ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

Corollarium.

850. Cum resistentia ad vim tangentialem sit referenda, ex his intelligitur, quomodo resistentiae effectus sit determinandus. Vt si fuerit resistentia $= R$, erit $dv = -(T + R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

PROPOSITIO 94.

Problema.

Tab. XVII. Fig. 3.

851. *Vis normalis deflectentis* N *effectum in corpus super superficie quacunque motum determinare.*

Solu-

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, exprimatur superficiei natura hac aequatione $dz = P\,dx + Q\,dy$; et moueatur corpus celeritate altitudini v debita per elementum Mm: quo percurso, nisi vis deflectens adesset, progrederetur per elementum $m\mu$ secundum lineam breuissimam; foretque $\pi\varrho = y + 2\,dy + \frac{(P\,dy - Q\,dx)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ et $\varrho\mu = z + 2\,dz + \frac{(dx + P\,dz)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ (835.). Iam accedat vis normalis deflectens N, quae directionem habeat antrorsum. Haec ergo vis efficiet, vt corpus descripto elemento Mm non per $m\mu$ incedat, sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur pergere per $m\nu$, erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curuae a corpore descriptae. Quare demisso ex ν in planum APQ perpendiculo $\nu\sigma$; erit $\pi\sigma = y + 2\,dy + ddy$ et $\sigma\nu = z + 2\,dz + ddz$. Hinc ergo habebitur $\sigma\varrho = \frac{(P\,dy - Q\,dx)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1+P^2+Q^2)} - ddy$ et $\mu\varrho - \nu\sigma = \frac{(dx + P\,dz)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1+P^2+Q^2)} - ddz$. Posito vero breuitatis ergo $\frac{(P\,dy - Q\,dx)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1+P^2+Q^2)} = dd\eta$ et $\frac{(dx + P\,dz)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1+P^2+Q^2)} = dd\zeta$, inuenietur radius osculi angulo elementari $\mu m \nu$ respondens =

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{((dz\,dd\eta - dz\,ddy - dy\,dd\zeta + dy\,ddz)^2 + dx^2(dd\eta - ddy)^2 + dx^2(dd\zeta - ddz)^2)}}$$

Hic ergo si dicatur $= r$ erit $N = \frac{2v}{r}$ seu $2v = Nr$, quia hic angulus eodem modo generatur, quo corpus a vi normali in plano a linea recta de-

flectitur. Est vero $dzdd\eta - dydd\zeta = -\frac{(dy + Qdz)(dPdx + dQdy)}{(1 + P^2 + Q^2)}$. Atque loco $dd\eta$ et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dzddy - dyddz)^2 - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dPdx + dQdy)^2}{1 + P^2 + Q^2})}}$$

Cum autem per aequationem $dz = Pdx + Qdy$ sit $dPdx + dQdy = ddz - Qddy$, erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata $r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{-ddy(dx + Pdz) + ddz(Pdy - Qdx)}$. Hanc ob rem erit $ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$. Q. E. I.

Scholion I.

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (79) pro effectu huiusmodi vis determinando inuenimus. Differentia enim tantum est in signo litterae N, quam vim ibi negatiue accipiendam esse apparet. Atque hic etiam de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata, quam hic extraximus, aeque potest esse negatiua ac affirmatiua. Hoc vero dubium, si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur; quia formula eiusmodi esse debet, vt punctum ν cis μ cadat si potentia N antrorsum, vt posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radicis quadratae determinaui; atque hanc ipsam formulam inueni.

Co-

Corollarium 1.

853. Si vis deflectens N euanescat, corpus motum suum in linea breuissima continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posito enim $N = o$, habebitur $ddy(dx + Pdz) = ddz(Pdy - Qdx)$, quae aequatio est pro linea breuissima.

Corollarium 2.

854. Quaecunque ergo vis premens, et vis tangentialis atque resistentia corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis deflectens, corpus semper in linea breuissima mouebitur.

Scholion 2.

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, ea ex hoc deducetur, quod ea posita sit in plano tangente superficiem, atque simul sit normalis curuae descriptae; sit ergo MG eius directio et G punctum, in quo plano APQ occurrit; ita vt vis N secundum MG trahere censenda sit, dum eam ante antrorsum vrgere posuimus. Primo ergo determinari debet intersectio plani superficiem in M tangentis intersectio cum plano APQ, quae sit recta TVG; Haec vero inuenietur, si duae tangentes superficiem ad planum APQ vsque producantur, atque puncta, in quibus in planum APQ incidunt linea recta iungantur. Sit ergo MT tangens lineae descriptae, quae

Tab. XVII. Fig. 4.

quae propterea ſuperficiem quoque tanget; erit vt iam inuenimus $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$ (849.). Porro ſuperficies ſecta intelligatur plano PQM, ſitque MV ſectionis huius tangens; erit $QV = \frac{z}{Q}$, ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ poſito $dx = o$. Innoteſcit ergo punctum V, quocirca recta TV producta erit interſectio plani tangentis ſuperficiem in M cum plano APQ. Punctum ergo G in quo recta MG plano APQ occurrit, poſitum erit in recta TV. Porro in recta TQ ſumatur $QS = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; eritque MS normalis in elementum Mm deſcriptum. Atque ſi ad QS ducatur normalis SG, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in elementum Mm perpendiculares. Quare cum MG ſit quoque normalis in elementum deſcriptum, punctum G quoque poſitum erit in recta SG. Punctum ergo G erit in interſectione rectarum TV et SG. Eſt vero $PL = \frac{ydy + zdz}{dx}$, et ang. ELG = ang. PQT. Ponatur $GE = t$, erit $LE = \frac{tdy}{dx}$, et $PE = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx}$. Deinde etiam propter triangula ſimilia eſt $FP : FT + PV = PE : GE - PV$, hoc eſt $\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx} : t - \frac{z}{Q} + y$. Hinc prouenit $t = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy} - y = GE$, et $AE = x + \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy}$, vnde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG erit $QG^2 = \frac{z^2(dx + Pdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2} + \frac{z^2(dy + Qdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2}$, et $QG = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz^2(1 + P^2 + Q^2))}}{Qdx - Pdy}$

atque ipſa $MG = \frac{z(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{Qdx - Pdy}$.

PRO-

PROPOSITIO 95.
Problema.

856. *Si corpus super superficie motum a quotcunque potentiis sollicitetur; definire vires normales prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.*

Solutio.

Tab. XVII. Fig. 2.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas $x, y\ z$ Sit nunc vis corpus in M secundum parallelam abscissae PA trahens $=E$; vis secundum parallelam ipsi QP trahens $=F$, et vis secundum MQ trahens $=G$. Singulae ergo hae vires resoluendae sunt in ternas, normalem prementem scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae tres directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires normales et tangentialis prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem illarum virium directiones cum istis constituunt. Incipiamus a vi tangentiali, cuius directio est MT existente $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$, atque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$ et $MT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dz}$. Vnde erit cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali constituit $= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. In quem si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta $= \frac{Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Cosinus vero anguli, quem MT con-

constituit cum directione vis F, quae est ipsi QP parallela est $=$ cos. PQT. $\int QMT = \frac{PQ - FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Vis ergo tangentialis ex F orta est $= \frac{Fdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Cosinus porro anguli, quem directio vis E constituit cum MT est $= \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ ideoque vis tangentialis ex vi E orta $= \frac{Edx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$.

Tab. XVII. Fig. I. Iam consideretur vis premens, cuius directio est MN, existente $AH = x + Pz$ et $HN = -y - Qz$, seu $PH = Pz$ et $QP + HN = -Qz$. Ex quo erit $QN = z\sqrt{(P^2 + Q^2)}$ et $MN = z\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$. Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus est $\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$, ideoque vis premens ex G orta $= \frac{G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, cum MN constituit, cosinus est $=$ cos. PQN. $\int QMN = \frac{(PQ + HN)QN}{QN.MN} = -\frac{Q}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Ergo vis premens ex vi F orta est

Tab. XVII. Tab. 4. $= -\frac{FQ}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Atque simili modo vis premens ex vi E orta est $= -\frac{EP}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Denique cum vis deflectentis directio sit MG, atque $PE = \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy}$ et $QP + EG = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy}$; erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus $=$

$$\frac{Qdx - Pdy}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q_2)}};$$

quare vis deflectens ex vi G orta est $= \frac{G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$

Porro anguli, quem MG cum directione vis F con-

constituit, cosinus est $= \frac{PQ + EG}{MG} =$

$$\frac{dx + Pdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$; quamobrem vis deflectens ex vi F orta est $= \frac{F(dx + Pdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$

Denique anguli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est $= \frac{-PE}{MG} =$

$$\frac{-dy - Qdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$. Vis ergo deflectens ex vi E orta est $= \frac{-E(dy + Qdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$.

Cum autem ante vim tangentialem vocauerimus T; vim prementem $= M$ et vim deflectentem $= N$: ad has vires tres propositas E, F, et G reduximus; erit namque $T = \frac{Edx + Fdy + Gdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et $M = \frac{-EP - FQ + G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ atque $N = \frac{-E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) + G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

857. Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G sollicitetur; erit, posito v pro altitudine debita celeritati in M, $dv = -Edx - Fdy - Gdz$ (849.), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentiarum E, F et G orta.

Co-

Corollarium 2.

858. Si praeterea corpus in medio resistente moueatur, atque resistentia in M fuerit $= R$; erit $dv = -E\,dx - F\,dy - G\,dz - R\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 3.

859. Si in aequatione §. 851. inuenta, in qua effectus vis deflectentis N est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione virium E, F et G orta, prodibit $\frac{2v\,ddz(P\,dy - Q\,dx) - 2v\,ddy(dx + P\,dz)}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ $= -E(dy + Q\,dz) + F(dx + P\,dz) - G(P\,dy - Q\,dx)$.

Corollarium 4.

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus conficiatur vna eliminanda v; prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = P\,dx + Q\,dy$ coniuncta determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

Corollarium 5.

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam premitur, tam ex vi normali premente M, quam ex vi centrifuga orta est $= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dP\,dx + dQ\,dy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ (845), substituto loco M valore inuento.

Corollarium 6.

862. Est vero ex aequatione coroll. 3. inuenta $2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(E(dy + Q\,dz) - F(dx + P\,dz) + G(P\,dy - Q\,dx))}{-ddz(P\,dy - Q\,dx) + ddy(dx + P\,dz)}$

quo

quo valore ibi fubftituto prodibit tota preffio $=$
$$\frac{(Gdxddy - Fdxddz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}.$$

Scholion.

863. Quia tres potentiae E, F, G directiones habent inuicem normales, erit potentia iis aequiualens $= \sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$. His vero tribus viribus aequiualere inuenimus tres M, N et T, quarum directiones funt quoque inuicem normales; quare iftis tribus aequivalens vis erit $= \sqrt{(M^2 + N^2 + T^2)}$. Quamobrem fi loco M, N et T fubftituantur valores inuenti ex E, F et G, prodire debet quoque $\sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$; id quod calculo inftituto re ipfa fe habere deprehendetur. Inferuit autem hoc inftar probationis, vtrum calculus prolixus, quo haec refolutio eft abfoluta, recte fuerit inftitutus, an vero fecus. Hac vero probatione inftituta reperientur fe hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96.

Problema.

864. *In hypothefi grauitatis vniformis et deorfum directae* g, *determinare lineam, quam corpus fuper quacunque fuperficie proiectum in vacuo defcribit.*

Solutio.

Sit APQ planum horizontale, et M punctum tam in fuperficie data, quam in linea a corpore Tab. XVII. Fig. 2.

 de-

descripta. Erit ergo MQ verticalis et propterea directio vis grauitatis g. Positis $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, atque aequatione superficiei naturam exprimente $dz = Pdx + Qdy$; sit celeritas in M, qua elementum Mm percurritur, debita altitudini v. Cum igitur problema hoc sit casus praecedentis; sit enim $G = g$, $E = o$ et $F = o$; habebuntur hae duae aequationes $dv = -gdz$ (857.), atque $2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pdz) + g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = o$. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum esset, si in planum horizontale APQ perueniret, $= b$; erit $v = b - gz$. Per alteram vero aequationem est $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}$. Vnde erit $\frac{dv}{2v} = \frac{dzddz(Pdy - Qdx) - dzddy(dx + Pdz)}{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Quae aequatio ope aequationis $dz = Pdx + Qdy$ transmutatur in hanc $\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$; quae integrata dat $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$. In quouis ergo casu speciali inuestigari debet, an $\frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$ integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in differentialibus primi gradus; atque cum sit $v = b - gz$, orietur aequatio differentialis primi gradus curuae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in superficiem secundum normalem erit $= \frac{gdxdy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}$, quae sublatis differentialibus secundi gradus abit in hanc $\frac{-g}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} - \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi grauitatis vniformis g et deorsum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cognosci potest, omnino vt si corpus in eodem plano moueretur.

Corollarium 2.

866. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur, ponatur dt, erit $dt = \frac{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}{\surd v}$. Per aequationem ergo inuentam erit $ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$; atque $\frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$.

Corollarium 3.

867. Ex inuentis aequationibus reperietur $ddy = \frac{g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(Pdy-Qdx)}{(1+P^2+Q^2)dx}$ atque $ddz = \frac{gQ(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dx^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(dx+Pdz)}{(1+P^2+Q^2)dx}$. Hinc erit $dzddy - dyddz = \frac{gP(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2(b-gz)(1+P^2+Q^2)} - \frac{(dPdx+dQdy)(dy+Qdz)}{1+P^2+Q^2}$. Curuae vero descriptae radius osculi erit $= \frac{2(dx^2+dy^2+dz^2)(b-gz)\surd(1+P^2+Q^2)}{\surd(g^2(Pdy-Qdx)^2(dx^2+dy^2+dz^2)+4(b-gz)^2(dPdx+dQdy)^2)}$.

Scholion.

868. Harum formularum vsum in casibus particularibus, quibus certa quaedam species superficierum consideratur, in sequentibus problematis fusius exponemus, quibus singularium superficierum exempla adiungemus.

PROPOSITIO 97.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. 1.

869. *In hypothesi grauitatis uniformis deorsum tendentis* g, *determinare motum corporis in superficie cuiuscunque cylindri, cuius axis sit verticalis.*

Solutio.

Quia axis cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales inter se aequales; sit igitur ABQC basis cylindri, in cuius superficie mouetur corpus. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$, sitque z corporis altitudo super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius superficiei cylindricae hac exprimetur aequatione $o = Pdx + Qdy$ seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates infinite magnae, seu euanescente coefficiente ipsius dz, si quem assumsissemus. Quamobrem in aequationibus ante inuentis P et Q quasi quantitates infinite magnae considerari debent; etiamsi sint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y tantum, neque in iis inerit z. His ergo in calculum deductis, habebitur $v = b - gz$; atque $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzddy - Pdyddz + Qdxddz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzddy - dy^2ddz - dx^2ddz}$ propter analogiam $P : Q = dy : -dx$. At posterior aequatio logarithmica erit $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

$-l(dx^2+dy^2)+lc$. Vnde fit $\frac{v}{c}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}=1+\frac{dz^2}{dx^2+dy^2}$ Hinc oritur $(b-c-gz)(dx^2+dy^2)=c\,dz^2$ seu $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b-c-gz)}}$, cuius integralis est $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=-\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, vbi $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percursum. Si tempusculum quo elementum Mm absoluitur ponatur dt, erit $\frac{ddt}{dt}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ atque $\alpha dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, porroque $\alpha t=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Quare tempora erunt proportionalia arcubus in basi respondentibus. Aequatio autem $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=-\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, dabit aequationem pro curua in superficie cylindrica descripta, si haec superficies in planum concipiatur explicata: denotabit enim tum $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ abscissam in axe horizontali et z applicatam verticalem. Proiectionem vero curuae descriptae in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante habebimus, si ope aequationis $Pdx+Qdy=0$ eliminetur y, vt prodeat aequatio inter x et z, quae erunt coordinatae huius proiectionis. Scilicet ob $dy=-\frac{Pdx}{Q}$ erit $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx}{Q}\sqrt{(P^2+Q^2)}$, ideoque $\int\frac{dx\sqrt{(P^2+Q^2)}}{Q}=\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, vbi in P et Q loco y eius valor in x debet substitui. Pressio vero quam superficies sustinebit a sola vi centrifuga orietur, propter potentiam g in ipsa superficie sitam, eritque $=\frac{2(b-gz)(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}$, qua vi corpus ab axe

 cylin-

cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit affirmatiua. Q. E. I.

Corollarium 1.

870. Curua ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proiectoriam, quam corpus proiectum in plano verticali describeret.

Corollarium 2.

871. Si motus corporis super superficie cylindrica compositus consideretur ex motu verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex horizontali; erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportionalia sunt $\int V(dx^2 + dy^2)$ i. e. arcubus horizontali motu percursis. Motus vero verticalis erit vel aequabiliter accelератus vel retardatus.

Corollarium 3.

872. Si ergo motus horizontalis euanescit, corpus recta vel ascendet vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus prodit, si fuerit $c = o$, quo $V(dx^2 + dy^2)$ euanescit.

Ex-

Exemplum.

873. Sit basis cylindri circulus cuius, quadrans sit BQC et radius AB $=a$; erit $x^2+y^2=a^2$ et $xdx+ydy=o$. Fiet ergo $P=x$ et $Q=y=\sqrt{(a^2-x^2)}$. Proiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticali ex AC erecto exprimetur aequatione $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$. Si ergo fuerit $c=o$, fiet $dx=o$, atque $x=$ constanti; quare hoc casu proiectio erit linea recta. Curua vero, quae est proiectio pro quocunque ipsius c valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet est $=\frac{2(b-gz)(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)a}=\frac{2c}{a}$; propter aequationem $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}$. Quare pressio vbique erit constans et ipsi c proportionalis.

Corollarium 4.

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylinder quicunque sustinet $=$

$$\frac{2c(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}=\frac{2Q^2c(dPdx+dQdy)}{dx^2(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{2Qc(QdP-PdQ)}{dx(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Scholion.

875. Non solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica erecta corporis motus

tus facile poteſt determinari; ſed etiam ſi cylindri axis fuerit horizontalis eadem facilitate motus corporis cognoſcetur. Namque ſi corpus non habeat motum horizontalem iuxta axem cylindri corpus perpetuo in eadem cylindri ſectione permanebit, in eaque mouebitur tanquam ſuper linea data. Sin vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit, neque alterum motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus corporis motus facile cognoſcetur.

PROPOSITIO 98.

Problema.

Tab. XVIII. Fig. 2.

876. *Si corpus moueatur in ſuperficie ſolidi rotundi, cuius axis eſt verticalis* AL, *in vacuo a grauitate uniformi* g *ſollicitatum; determinare motum corporis ſuper huiusmodi ſuperficie.*

Solutio.

Generetur ſolidum rotundum conuerſione curuae AM circa axem verticalem AL, erunt omnes eius ſectiones horizontales circuli, quorum radii ſunt applicatae curuae AM. Aequatio ergo naturam huius ſuperficiei exprimens erit $dz = \frac{xdx+ydy}{Z}$ denotante Z functionem quamcunque ipſius z; erit enim $2\int Zdz = x^2 + y^2 = LM^2$. Si ergo detur aequatio pro curua AM, inter $AL = z$ et $LM = \sqrt{2\int Zdz}$; dabitur quoque Z. His praemiſſis erit itaque

itaque $P = \frac{x}{Z}$ et $Q = \frac{y}{Z}$; qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequationes, ex quibus tam curua descripta quam motus super ea cognoscetur, $v = b - gz$ atque $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{xddy}{xdy - ydx} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\,l(xdy - ydx) + \text{const.}$ Quare erit $v = \frac{c^3(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(xdy - ydx)^2} = b - gz$. Ponatur $x^2 + y^2 = u^2$; erit u functio quaedam ipsius z, nempe $u^2 = 2\int Zdz$; atque superior aequatio abibit in hanc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(c^3dz^2 + u^2du^2(b - gz))}}{\sqrt{(u^2(b - gz) - c^3)}}$. Proiectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y habebitur, si ex aequatione $x^2 + y^2 = 2\int Zdz$ valor ipsius z in x et y substituatur; huiusque proiectionis arcus est $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. In plano autem verticali habebitur proiectio eliminanda y; quo facto prodit aequatio $\frac{udx - xdu}{c\sqrt{c(u^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2 + dz^2}{u^2(b - gz) - c^3}}$, quae aequatio si per u diuidatur constructionem admittit. Pressio vero quam superficies sustinet axem versus erit $= \frac{-gZ}{\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}} - \frac{2c^3Z(dx^2 + dy^2) + 2c^3dZ(xdx + ydy)}{Z(xdy - ydx)^2\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

877. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur ponatur dt; erit $\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xdy - ydx}$, cuius integralis est $\alpha dt = xdy - ydx$. Ipsum ergo tempus erit vt $xy - 2\int ydx$, denotante $\int ydx$ aream proiectionis in plano horizontali.

Corollarium 2.

878. Si corpus in proiectione in plano horizontali moueri concipiatur, erit celeritas eius in Q debita altitudini $\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xdy)^2}$; ex quo motu in proiectione ipse motus in superficie inuenietur.

Corollarium 3.

Tab. XVIII. Fig. 3.

879. Sit igitur BQC proiectio curuae in plano horizontali, in qua moueatur corpus ita vt motus eius respondeat motui corporis in superficie ipsa; erit tempus quo arcus BQ absoluitur vt $\frac{xy}{2} - \int y dx$ seu negatiue vt $\int y dx - \frac{xy}{2}$ i. e. vt area BAQ ducto radio AQ.

Corollarium 4.

880. Areae autem BAQ elementum est $\frac{ydx-xdy}{2}$. Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculo AT erit $AT = \frac{ydx-xdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare altitudo celeritati in Q debita est $= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$, posito $AT = p$.

Corollarium 5.

881. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea mouebitur, ac si libere moueretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A.

Corollarium 6.

882. Respondeat punctum B motus in superficie facti initio, et cum detur directio prima

ma motus in ſuperficie, dabitur perpendiculum in tangentem in B. Sit ergo $AB = f$, et perpendiculum in tangentem $= b$; erit altitudo celeritati in B debita $= \frac{c^3}{b^2}$.

Corollarium 7.

883. Vis ergo centripeta verſus A tendens, quae faciet, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, erit $= \frac{2c^3 dp}{p^3 du}$, poſito u pro $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Aequatio vero inter u et z exprimet naturam curuae, cuius conuerſione genita eſt ſuperficies propoſita, ideoque datur.

Corollarium 8.

884. Eſt porro $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{udu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}}$ et $ydx - xdy = \frac{pudu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}}$. Hi valores ſi in aequatione inuenta ſubſtituantur, dabunt $c^3 u^2 du^2 + c^3 u^2 dz^2 - c^3 p^2 dz^2 = (b - gz) p^2 u^2 du^2$, ſeu $p^2 = \frac{c^3 u^2 (du^2 + dz^2)}{c^3 u z^2 + u^2 du^2 (b - gz)}$.

Corollarium 9.

885. Huius ergo quantitatis $- \frac{c^3 dz^2 - u^2 du^2 (b - gz)}{u^2 (du^2 + dz^2)}$ differentiale per du diuiſum dabit vim centripetam in A requiſitam, vt corpus in proiectione BQC moueatur libere, motu reſpondente motui corporis in ſuperficie.

Corollarium 10.

886. Si $c = o$, fiet quoque $p = o$. Quare hoc caſu proiectio in plano horizontali erit recta per

A transiens. Super qua corpus ad A accedens ita attrahetur vt sit vis centripeta $\frac{1}{du} d. \frac{-du^2(b-pz)}{(du^2+dz^2)}$.

Corollarium 11.

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis tangens in B ad AB erit normalis; ideoque $b=f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis erit celeritati in proiectione; quare si fuerit i valor ipsius z, si est $u=f$; erit $b-gi=\frac{c^2}{f^2}$.

Corollarium 12.

888. Si praeterea vis centripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, curua BQC erit circulus, et propterea ipsa quoque curua in superficie descripta, atque motus tam in superficie quam in proiectione aequabilis. Sit vbi est $u=f$ et $z=i$, $dz=mdu$; erit ob $p=f$, et $u=f$ et $z=y$ in casu, quo circulus describitur, $2c^2=gmf^2$.

Corollarium 13.

889. Si ponatur $\pi:1$ vt peripheria ad diametrum erit circuli nostri peripheria $=2\pi f$, quae diuisa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^2}{f^2}}$ i. e. $\sqrt{\frac{gmf}{2}}$, dat tempus vnius periodi in circulo, quod ergo erit $=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$. Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas absoluens erit $=\frac{f}{m}$ in eadem grauitatis hypothesi.

Corollarium 14.

890. In superficie ergo, quae generatur conuersione curuae AM circa axem verticalem AL,

Co-

corpus proiectum circulum radii LM describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis $=$ subnormali LS integram oscillationem absoluit.

Corollarium 15.

891. Si ergo curua AM fuerit parabola omnes periodi per circulos horizontales in conoide parabolica aequalibus absoluentur temporibus; atque penduli, iisdem temporibus oscillationes integras peragentis longitudo aequabitur dimidiae parti parametri.

Scholion 1.

892. Quaecunque assumatur curua AM; si vis centripeta motus in proiectione versus A ex data formula definiatur, eaque aequalis ponatur vi centrifugae, atque coniungatur cum aequatione $b-gi = \frac{c^3}{f^2}$; prodibit $2c^3 = gmf^3$; hoc enim casu tam proiectio erit circulus, quam ipsa curua in superficie descripta. Quo vero hoc melius appareat ponatur $dz = q\,du$, prouenietque vis centripeta $= \frac{2q\,dq(bu^2 - gzu^2 - c^3)}{u^2 du(1+q^2)^2} + \frac{2c^3q^2 + gqu^3}{u^3(1+q^2)}$. Iam ponatur $u = f$; $z = i$; et $bf^2 = gf^2i + c^3$; atque $q = m$; erit vis centripeta $= \frac{2c^3m^2 + gmf^3}{f^3(1+m^2)}$, aequalis posita vi centrifugae $\frac{c^3}{f^3}$ dat $2c^3 = gmf^3$.

Exemplum.

893. Sit superficies conica circularis seu AM linea recta vtcunque inclinata ad axem AL; quare Tab. XVIII. Fig. 2. et 3.

 erit

erit $z = mu$ et $dz = mdu$. Vis ergo centripeta ad A tendens, quae faciet vt corpus libere in proiectione BQC moueatur, erit $= \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}$. Haec ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distantiarum a centro A proportionali. Si $c = o$, tum proiectio erit linea recta per A transiens, atque vis centripeta erit $= \frac{gm}{1+m^2}$ siue constans. Corpus ergo motu aequabiliter accelerato ad A accedet, motus vero in superficie conica congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque pariter aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curuilinea et tangens in B normalis ad AB, erit $i = mf$, atque $b - mf = \frac{c^3}{f^2}$, posito AB $= f$. Erit ergo hoc casu $b = \frac{c^3 + mf^3}{f^2}$ atque si corpus in circulo horizontali reuoluitur, erit insuper $2c^3 = gmf^3$. Quo ergo hoc accidat debet esse celeritas corporis debita altitudini $\frac{c^3}{f2} = \frac{gmf}{2}$. Atque periodi in hoc circulo iisdem absoluentur temporibus, quibus penduli longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, verum tamen $b = \frac{c^3 + mf^3}{f}$, curua BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, curua quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, in quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per prop. 91 Libr. praeced. determinatur. Quoniam enim vis centripeta est $\frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}$, si haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ ob $y = u$, erit P $=$

$2c^3$

$\frac{2c^3u^2+gmu^3}{1+u^2}$, atque $\frac{dP}{P}=\frac{3gmu^2du}{2c^3u^2+gmu^3}$ atque $\frac{Pdy}{ydP}=\frac{2mc^3+gu^3}{3gu^3}$; ideoque posito $u=f$, distabit quoque linea absidum a praecedente abside angulo $180\sqrt{\frac{2mc^3+gf^3}{3gf^3}}$ graduum. Quoniam autem proxime est $2c^3=gmf^3$, erit angulus inter duas absides interceptus $=180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$ erit angulus inter duas absides interceptus maior quam 103 grad. 55′.

Scholion 2.

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super ea determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae mouebitur, et vel circulos describet vel alias curuas non parum elegantes, quemadmodum cuiuis experimentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos absoluit, a Cel. *Ioh. Bernoullio* in Act. Lips. A. 1719 iam est expositus sub titulo motus turbinatorii. At si curua non fuerit circulus, nemo quantum scio, hunc penduli motum vel considerauit vel determinauit.

DEFINITIO 6.

895. Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsi motus. *Hoc ergo casu pendulum non in eodem plano verticali mouetur, sed curuam*

uam quandam describet in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa pendulo longitudo, situm.

PROPOSITIO 99.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. 2. et 3.

896. *Penduli ad motum turbinatorium incitati, determinare motum et lineam curuam, quam in superficie sphaerica describit.*

Solutio.

Quia corpus motum pendulo est alligatum in superficie sphaerica mouebitur, cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius sphaerae $=a$, erit $z=a-\sqrt{(a^2-u^2)}$ ex natura circuli AM. Erit ergo $q=\frac{u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$ et $dq=\frac{a^2du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$ ideoque $\frac{2qdq}{u^2du}=\frac{2a^2}{u(a^2-u^2)^2}$. Ex his inuenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, $=\frac{2bu-2gau+3gu\sqrt{(a^2-u^2)}}{a^2}$. Atque pro curua BQC haec habebitur aequatio $p^2=\frac{a^2c^3}{c^3+(b-ga)(a^2-u^2)+g(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$, quae ad proiectionem BQC construendam sufficit. Sit tangens in B perpendicularis ad radium AB, id quod semper alicubi contingere debet, nisi proiectio sit linea recta, quia vis centripeta decrescit, decrescente u. Ponatur $AB=f$; erit $i=a-\sqrt{(a^2-f^2)}$, atque $b-ga$

$+g\sqrt{}$

$+g\sqrt{(a^2-f^2)}=\frac{c^3}{f^2}$. Si praeterea fuerit $2c^3=\frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, corpus in circulo reuoluetur, cuius radius est f, celeritate debita altitudini $\frac{c^3}{f^2}=\frac{gf^2}{2\sqrt{(a^2-f^2)}}$. Penduli vero integras oscillationes iisdem temporibus absoluentis longitudo est $=\sqrt{(a^2-f^2)}$. Sin autem non fuerit $2c^3=\frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, differentia vero sit valde exigua; curua BQC a circulo non multum discrepabit. Cuius curuae, quo positiones absidum inueniantur, erit iuxta prop. 91. Libri praeced. $y=u$ et $P=\frac{u^4}{a^2}(2b-2ga+3g\sqrt{(a^2-u^2)})$. Hinc est $\frac{dP}{P}=\frac{4du}{u}-\frac{3gudu}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$, atque $\frac{ydP}{Pdy}=4-\frac{3gu^2}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$. Quia curua fere est circulus, ponatur $u=f$, atque $2b-2ga=\frac{gf^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}}-2g\sqrt{(a^2-f^2)}=\frac{3gf^2-2ga^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, quo facto prodibit $\frac{ydP}{Pdy}=4-\frac{3f^2}{a^2}$. Hinc sequitur interuallum inter duas absides esse angulum $\frac{180a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$ graduum. Tanto scilicet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime distat, dissitus est a loco, in quo pendulum axi est proximum. Q. E. I.

Corollarium 1.

897. Quo igitur pendulum $AB=a$ motu turbinatorio circulum BDCE describat, oportet vt eius celeritas debita sit altitudini $\frac{g\,BO^2}{2.AO}$. Tab. XVIII Fig. 4.

Corollarium 2.

898. Longitudo vero penduli, quod oscillationes minimas integras eodem tempore absol-

uit, quo periodus in circulo BDCE conficitur, eſt = AO.

Corollarium 3.

899. Tempora ergo, quibus diuerſi circuli motu turbinatorio a pendulo AB percurruntur, ſunt in ſubduplicata ratione altitudinum AO.

Corollarium 4.

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maximum conficiat, cuius radius eſt a, celeritas infinite magna requiritur; atque quaeque periodus tempore infinite paruo abſoluitur.

Corollarium 5.

901. Si radius circuli BO fuerit valde paruus reſpectu penduli $AB = a$, congruent periodi motus turbinatorii cum oſcillationibus integris eiusdem penduli.

Corollarium 6.

902. Si curua deſcripta non fuerit circulus, ſed figura proxima, atque BO valde paruum; erit angulus inter duas abſides 90°, ſeu rectus.

Corollarium 7.

903. Hoc vero caſu curua a corpore deſcripta erit ellipſis centrum habens in A. Quod ex vi

vi centripeta colligitur, quae tum ipsis distantiis sit proportionalis.

Corollarium 8.

904. Quo maior autem est radius BO; eo maior quoque erit angulus inter duas absides interceptus. Atque si fiat BO = BA, erit hic angulus 180°.

Corollarium 9.

905. Si angulus BAO fuerit 30. grad. erit BO $= \frac{1}{2}$ BA seu $f = \frac{1}{2}a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum seu 99°, 50′. Proiectionis ergo in plano horizontali haec erit figura *abcdefghik* etc. in qua absides summae sunt in *a*, *c*, *e*, *g*, *i*, et imae in *b*, *d*, *f*, *h*, *k*. Fig. 5.

Corollarium 10.

906. In hac igitur figura linea absidum mouetur in consequentia; singulis enim periodis circiter 39° progredietur in consequentia.

Corollarium 11.

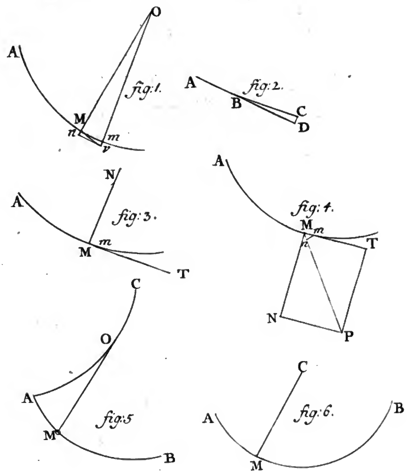
907. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30. graduum; tum minor etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quouis angulo BAO statim cognoscatur, fractionem $\frac{a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$

 in

in feriem refoluo, quae erit fequens, $\frac{1}{2} + \frac{3f^2}{16a^2} + \frac{27f^4}{256a^4} +$ etc. Vna ergo periodo linea abfi- promouetur angulo $\frac{135f^2}{a^2}$ graduum, q. pr. fi f valde eft paruum.

Corollarium 12.

908. Ex his apparet promotionem lineae abfidum in fingulis periodis proxime effe in duplicata ratione finus anguli BAO.



Tom:II. Tabula I.

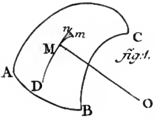


fig:1.

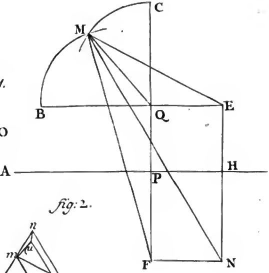


fig:2.

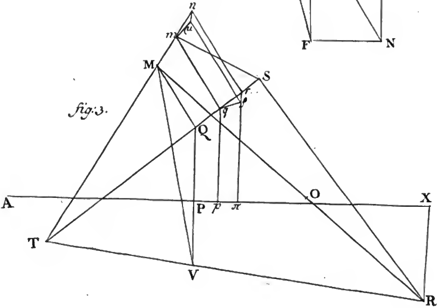


fig:3.

Tom:II. Tab:II

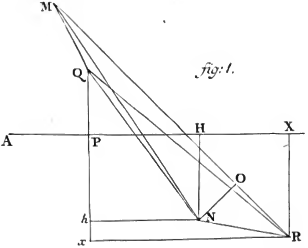


fig:1.

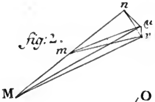


fig:2.

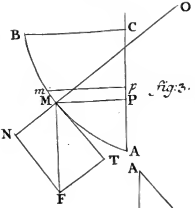


fig:3.

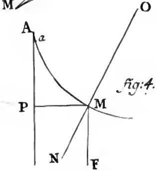


fig:4.

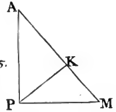


fig:5.

Tom:II. Tab:III.

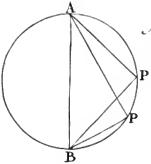
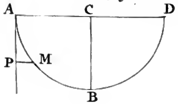


fig: 1.

fig: 2.



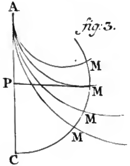


fig: 3.

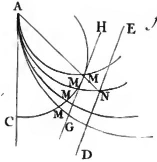


fig: 4.

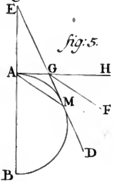


fig: 5.

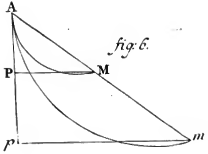
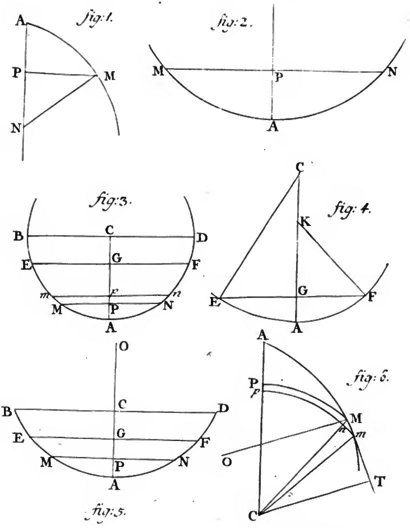
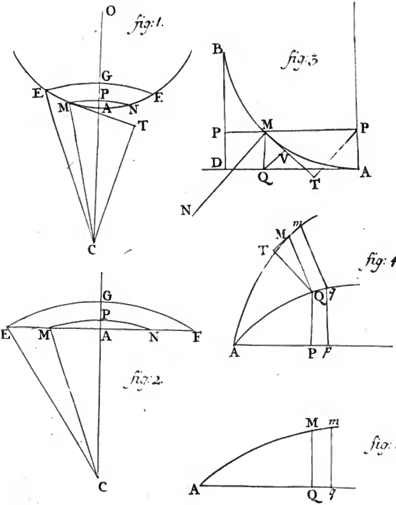


fig: 6.


fig:1.
A
P
M
N
fig:2.
M
P
N
A
fig:3.
B
C
D
E
G
F
m
p
n
M
P
N
A
fig:4.
C
K
G
E
F
A
O
B
C
D
E
G
F
M
P
N
A
fig:5.
A
fig:6.
P
p
M
n
m
O
T
C

Tom:II.Tab:V.


fig:1.
O
G
E
P
F
M
A
N
T
C
fig:3
B
M
P
P
D
V
Q
T
A
N
fig:4.
m
M
T
Q
q
A
P
p
fig:2.
G
P
E
M
A
N
F
C
fig: 5.
M
m
A
Q
q

Tom:II.Tab:VI.

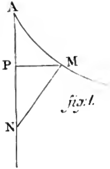


fig:1.

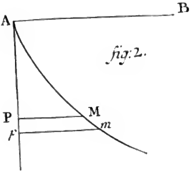


fig:2.

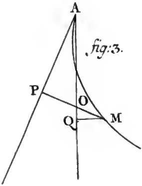


fig:3.

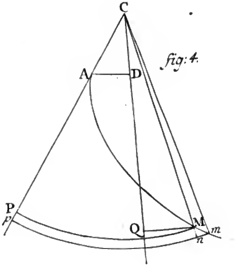


fig:4.

Tom:II Tab: VII.

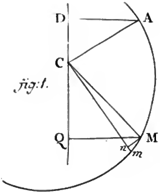


fig:1.

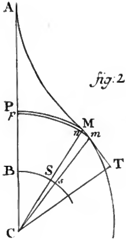


fig:2.

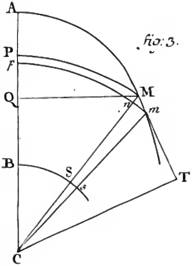


fig:3.

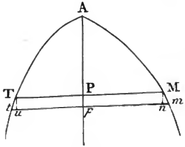


fig:4.

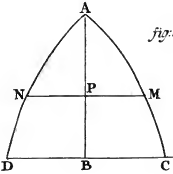


fig:1.

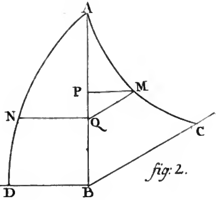


fig: 2.

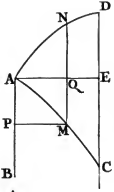


fig: 3.

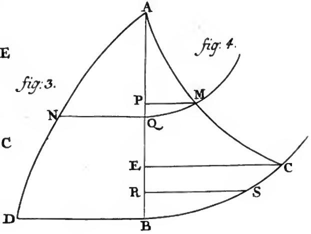


fig: 4.

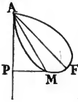
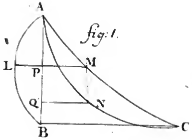
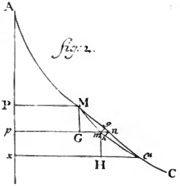
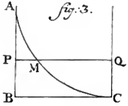
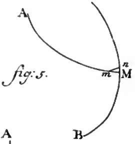


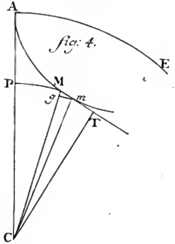
fig: 5.

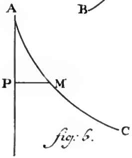

fig: 1.
A
L
P
M
Q
N
B
C


fig: 2.
A
P
M
p
G
m
n
o
h
x
H
c
C


fig: 3.
A
P
M
Q
B
C


fig: 5.
A
n
m
M
B


fig: 4.
A
E
P
M
g
m
T
C


fig: 6.
A
P
M
C

Tom: II. Tab: X.

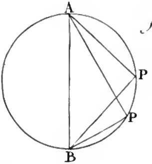


fig: 1.

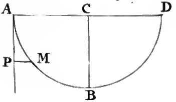


fig: 2.

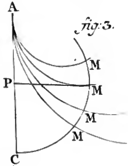


fig: 3.

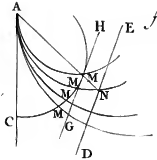


fig: 4.

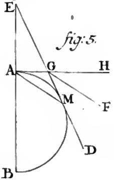


fig: 5.

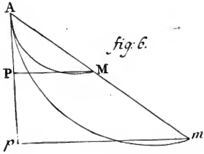


fig: 6.

Tom: II. Tab: IV.

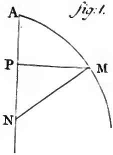


fig:1.

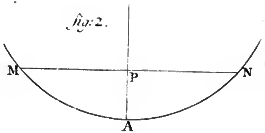


fig:2.

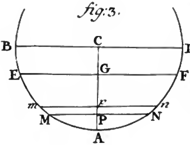


fig:3.

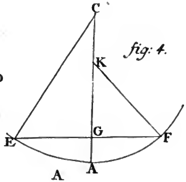


fig: 4.

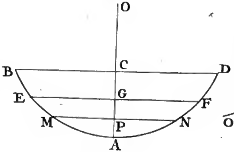


fig:5.

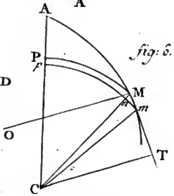


fig: 6.

Tom:II.Tab:V.

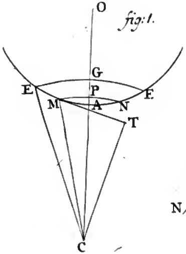


fig: 1.

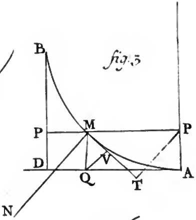


fig: 3.

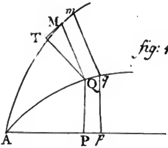


fig: 4.

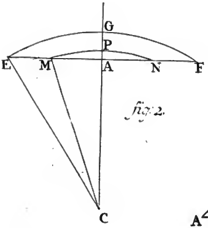


fig: 2.

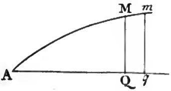
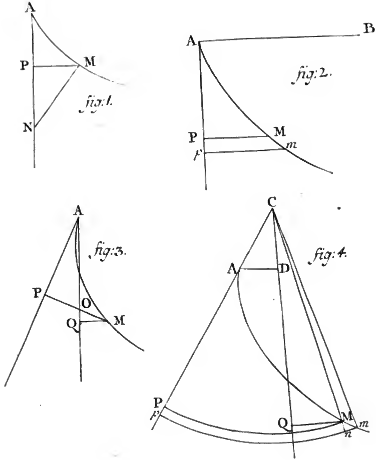


fig: 5.

Tom: II. Tab: VI.



Tom: II Tab: VII.

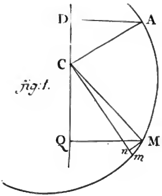


fig: 1.

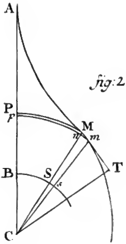


fig: 2.

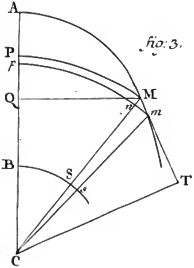


fig: 3.

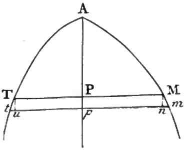


fig: 4.

Tom: II. Tab: VIII.

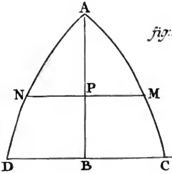


fig:1.

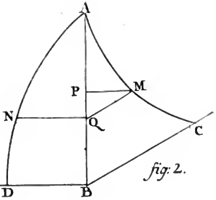


fig: 2.

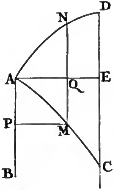


fig:3.

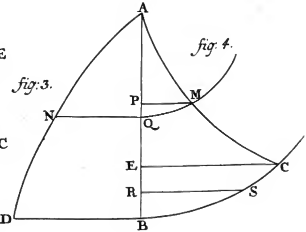


fig: 4.

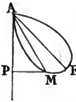
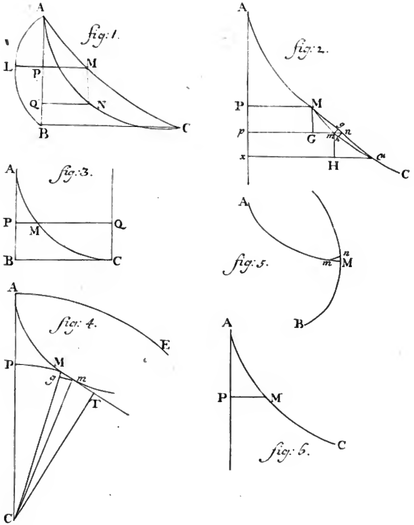
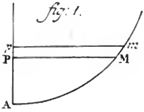


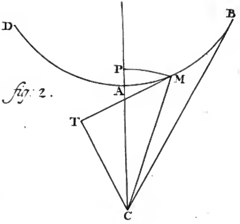
fig:5.

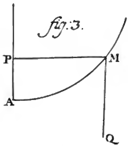
Tom:II. Tab:IX.

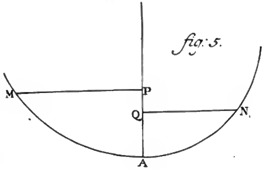

fig:1.
A
L
P
M
Q
N
B
C
fig:2.
A
P
M
p
G
m
g
n
x
H
C
fig:3.
A
P
M
Q
B
C
fig:5.
A
n
m
M
B
fig:4.
A
E
P
M
g
m
T
C
fig:6.
A
P
M
C

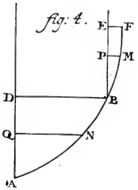
Tom:II. Tab:X.

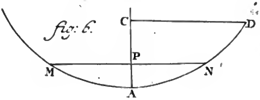

fig: 1.
p m
P M
A


fig: 2.
D B
P M
A
T
C


fig: 3.
P M
A
Q

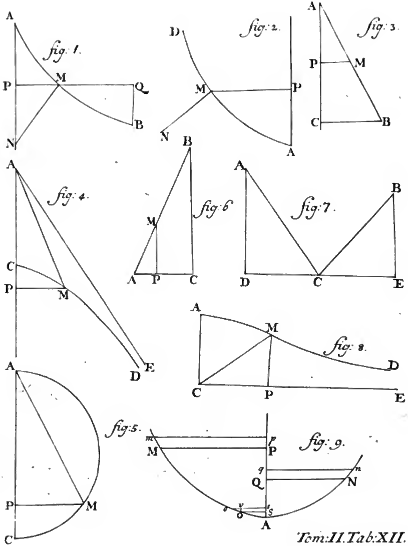

fig: 5.
M P
Q N
A


fig: 4.
E F
P M
D B
Q N
A

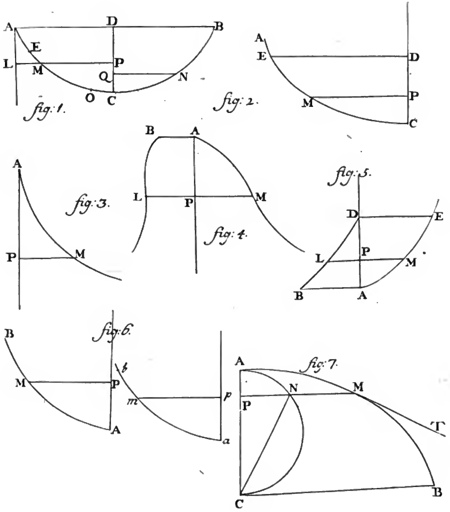

fig: 6.
C D
P
M N
A

Tom: II. Tab: XI.



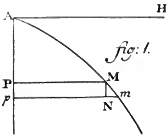


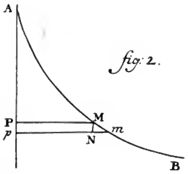
Tom:II.Tab:XII.

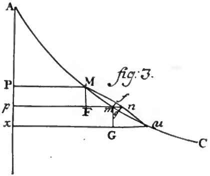


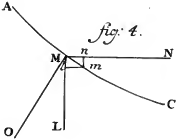
Tom: II. Tab: XIII.

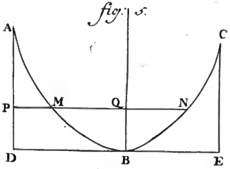


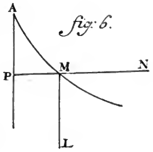






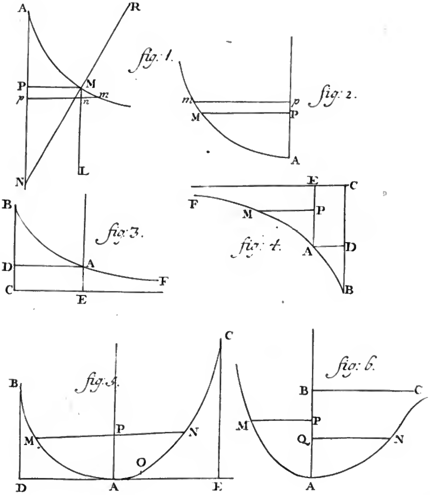




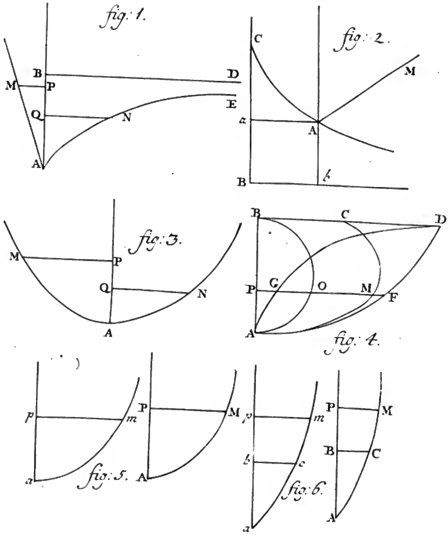


Tom: II. Tab: XIV.




fig: 1.
A R P M m p n N L
fig: 2.
m p M P A
fig: 3.
B D A C E F
fig: 4.
E C F M P A D B
fig: 5.
B C P N M O D A E
fig: 6.
B C M P Q N A

Tom:II.Tab:XV.



Tom: II. Tab: XVI

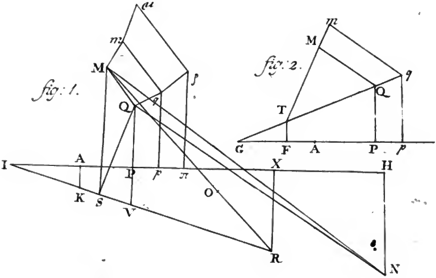


fig: 1.

fig: 2.

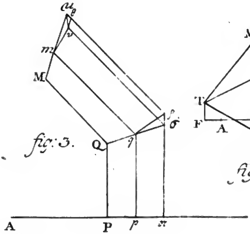


fig: 3.

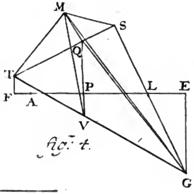


fig: 4.

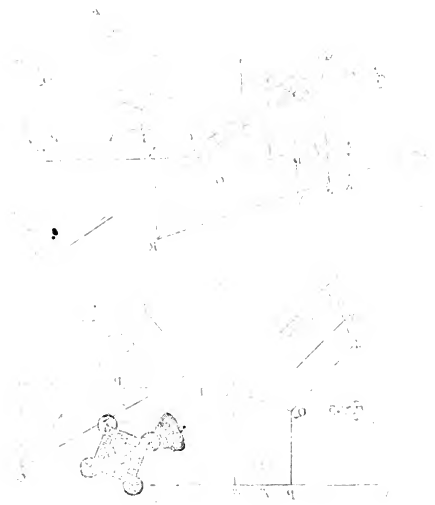
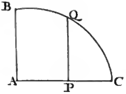


fig: 1.



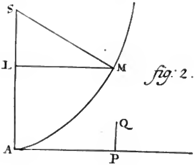


fig: 2.

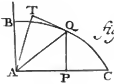


fig: 3.

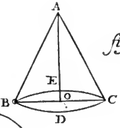


fig: 4.

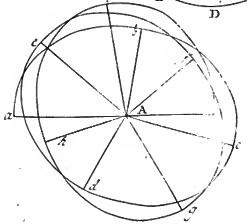


fig: 5.

Tom: II. Tab: XVIII.